

LD
2492
1972
4.3

Cajaz

análisis econométrico de distribución de ingresos

LD- Doreisa, DANE, 1990-223

Departamento Administrativo Nacional de Estadística
información para el desarrollo



Elaborado bajo la dirección de
POLIBIO CORDOVA
Experto de Naciones Unidas,
Oficina de Cooperación Técnica,
asignado al DANE (*).

(*) Las opiniones vertidas en el presente trabajo son de exclusiva responsabilidad del autor y no necesariamente pueden ser compartidas por las Naciones Unidas.

RECONOCIMIENTO

El presente trabajo ha sido posible llevarlo a efecto gracias al ambiente propicio que brinda el Departamento Administrativo Nacional de Estadística para la investigación y el análisis de la información. Por otra parte, las facilidades actualmente disponibles en el DANE para todo tipo de cálculo a través de su sistema de computación son amplias como también es altamente capaz el cuerpo técnico integrado por sus funcionarios. En otras circunstancias habría sido difícil la publicación de este trabajo. Por ello mis reconocimientos al DANE en general. En especial, deseo expresar mis agradecimientos al Estadístico Jairo Arias y a la Economista Sonia de Sin de la División de Muestreo y Proyectos Específicos y al Ingeniero Augusto Hernández de la Dirección de Procesamiento por su magnífica colaboración y excelente desempeño durante el desarrollo del trabajo.

P.C.

INDICE	Pág. No.
INTRODUCCION	8
I PARTE	
CAPITULO I	
Utilización de Funciones	10
CAPITULO II	
La Distribución de Pareto	11
1. Descripción	11
2. Métodos de ajuste	11
3. Cálculo de errores	13
4. Propiedades de la función de Pareto	14
a) Ingreso promedio	15
b) Porcentaje acumulativo de perceptores de ingreso	15
c) Porcentaje acumulativo de ingresos	15
5. Resultados prácticos	16
5.1 Ajustes de la función de Pareto	16
5.2 Estimación del ingreso promedio	17
5.3 Fracciones de ingreso y población que corresponden a un nivel cualquiera de ingreso	19
6. Gráfico de Pareto	20
Tablas y Gráficos	21
CAPITULO III	
La distribución de Lorenz	34
1. Descripción	34
2. Propiedades de la Función de Lorenz	35
a) Ingreso promedio para un intervalo en la distribución	35
b) Nivel de ingreso correspondiente a un punto cualquiera	35
3. Resultados prácticos. Aplicaciones al caso colombiano	35
3.1 Estimación de distribuciones de ingresos	35
3.2 Ingreso promedio para un intervalo de ingreso cualquiera en la distribución	36
3.3 Ingreso por unidad perceptora que corresponde a un punto dado	37
4. Aplicaciones para el caso del Ecuador	37
5. Gráfico de Lorenz	38
5.1 Resultados prácticos	38
6. Tablas y gráficos	39

	Pág. No.
CAPITULO IV	41
La Función de Gini	41
1. Descripción	41
2. Gráfico de Gini	41
3. Resultados prácticos	41
4. Índice de concentración de Gini	42
4.1 Resultados prácticos	43
Tablas y gráficos	43
CAPITULO V	49
Graficos Semi- logarítmicos	49
1. Resultados prácticos	49
Gráficos	50
CAPITULO VI	52
Distribución logarítmico - normal	52
1. Distribución Normal	52
2. Pruebas de asimetría y curtosis	52
3. Distribución log-normal	54
3.1 Prueba de bondad de ajuste	54
3.2 Aplicaciones del modelo	55
a) Ingreso promedio	55
b) Porcentajes de unidades perceptoras	55
4. Resultados prácticos	56
4.1 Aplicaciones al caso colombiano	65
4.2 Aplicaciones al caso ecuatoriano	66

II PARTE

CAPITULO I	68
La distribución de ingresos en el ámbito internacional	68
1. Formación de grupos de países	68
2. Análisis por grupos de países	69
3. Análisis por localización geográfica de países	69
4. Estimación del coeficiente b de Pareto por países	70
5. Gráfico de Lorenz	70
Tablas de resultados y gráficos	70
Referencias	83
Bibliografía y fuentes de información por países.	86

1. INTRODUCCION

En el análisis sobre la distribución del ingreso en Colombia publicado por el DANE en el Boletín Mensual de Estadística No. 237 de Abril de 1971 [8], se hizo un detallado estudio de la situación de los ingresos prevaleciente en el país en forma general y específicamente desde el punto de vista de las diversas regiones en que ha sido dividido; por áreas urbanas y rurales y por sexos, rama de actividad, ocupación, posición ocupacional y nivel educacional de la población económicamente activa. Para este análisis se utilizó básicamente como herramientas de análisis al coeficiente de concentración de ingresos de Gini y a la curva de Lorenz. El presente trabajo complementa el referido estudio mediante el planteamiento de un sistema de análisis econométrico de los ingresos a través de la utilización de funciones que ayudan a medir la desigualdad existente en la distribución de ingresos ya la vez permiten efectuar análisis adicionales correlativos. Las funciones a utilizarse en el trabajo son las de Pareto, Gini, Lorenz y la distribución logarítmico-normal. Se describen los métodos de ajuste de estas funciones, la aplicabilidad que puede alcanzarse con ellas y al mismo tiempo se presentan resultados obtenidos al aplicar los métodos propuestos a información estadística recolectada a través de investigaciones muestrales. El análisis se amplía mediante la utilización de gráficos referentes a las diversas funciones, los mismos que permiten una más fácil interpretación de los resultados obtenidos.

Finalmente se presenta información relevante sobre ingresos referente a varios países del mundo agrupada en forma tal que permita hacer análisis comparativos de la situación de nuestros países latinoamericanos y en especial Colombia y Ecuador, frente al resto del mundo.

Se espera que este ensayo sobre tan importante tema de la distribución de ingresos, determinante de la situación socio-económica real de los países, contribuya a ampliar los sistemas de análisis conocidos y, sobre todo, estimule la búsqueda de nuevos métodos, o sistemas más útiles que lleven a medir más exactamente la desigualdad existente en la distribución de los ingresos, la riqueza y el consumo de los habitantes de nuestros pueblos.

I PARTE

CAPITULO I

UTILIZACION DE FUNCIONES

La distribución de los ingresos puede ser presentada de diferentes formas, así por ejemplo puede indicarse a través del total de ingresos recibidos por un número de personas dentro de una escala determinada de ingresos, o de la relación porcentual de ingresos frente a la de perceptores, etc. Sin embargo, estos valores comparativos pueden también ser estructurados en forma de funciones que permitan el análisis de la distribución desde puntos de vista más amplios y que al mismo tiempo hagan posible la estimación de algunas variables que no pueden ser conocidas directamente.

Una vez calculadas estas funciones, las aplicaciones pueden ser muy diversas. Inclusive podrían servir de modelos útiles para ser aplicados a sectores sobre los cuales no se dispone de información suficiente para análisis de ingresos, o también para la elaboración de proyecciones de las variables que conforman la función.

Para la elaboración o cálculo de estas funciones lógicamente tiene que partirse de información estadística confiable que determine la estimación de funciones lo más precisas posibles. Pueden calcularse diversos tipos de funciones partiendo de la magnitud de los ingresos y del número de personas que los reciben.

Pueden plantearse diversos modelos analíticos que lleven a medir con mayor aproximación real la desigualdad existente en la distribución de ingresos, ya sea que esta desigualdad este dada en términos de concentración de ingresos en ciertos grupos de población, de magnitudes diferentes entre número de perceptores y volumen de ingresos o de cualquier otro tipo de expresiones de desigualdad, (*).

Para el presente trabajo se han escogido varias funciones conocidas para este tipo de análisis, con la introducción de diversas aplicaciones a estas funciones que seguramente serán de utilidad para quienes tienen interés en este tipo de estudios. Estas funciones teóricas son la distribución de Pareto, Lorenz, Gini y Log-normal. Se han escogido estas funciones por cuanto se encontró, a través del trabajo empírico, que proporcionan resultados adecuados para la conformación de distribuciones, a más de prestarse a variadas aplicaciones como es la estimación de valores no conocidos y de mucha utilidad para el análisis, tal es el caso de la estimación de ingresos promedios, porcentajes de perceptores por niveles de ingreso, ingresos recibidos por un número dado de perceptores, etc. Por otra parte, son funciones de rápida y fácil estimación por cuanto los resultados de una de ellas facilitan la estructuración de las demás. Esto, además de ser distribuciones bastante conocidas en este tipo de análisis y que por lo mismo podrán ser reconocidas, estudiadas, comentadas y quizá utilizadas por un mayor número de personas interesadas en la materia.

(*) El Centro Latinoamericano de Proyecciones Económicas de la CEPAL ha elaborado recientemente un estudio sobre varios modelos analíticos de medición de la desigualdad en la distribución de ingresos [15]

CAPITULO II

LA DISTRIBUCION DE PARETO

1. DESCRIPCION

El primer modelo analítico a estudiarse es el que hace uso de la conocida función de Pareto [1]. Mediante esta función se supone que existe una relación lineal decreciente entre el logaritmo del porcentaje de perceptores en un nivel de ingreso y el logaritmo de dicho nivel de ingreso. La relación es de la forma siguiente:

$$\log X = \log \alpha - \beta \log Y \quad (1)$$

o también $X = \alpha Y^{-\beta}$

con $\beta > 1$ y $Y \leq Y_0$ (2)

donde:

Y = Un nivel de ingreso cualquiera

X = Porcentaje de personas que reciben un nivel de ingreso mayor o igual a Y .

Y_0 = Ingreso mínimo recibido por una familia

α y β = Parámetros

Se considera a Y como variable independiente y a X como variable dependiente. El postulado de la función es suponer que cuanto mayor sea el nivel de ingreso considerado menor es el porcentaje de perceptores de ingreso, tendiendo a ser cero cuando el ingreso tiende a ser infinito. [2].

2. METODOS DE AJUSTE

Siendo que el nivel de ingreso es una variable matemática conocida, la función de Pareto queda perfectamente determinada si se conocen los parámetros α y β . En la práctica estos parámetros son estimados a partir de la información de una muestra o de otra fuente de datos disponible. El problema radica en como obtener "buenas" estimaciones. Si se supone que las variables no se comportan según una distribución normal las mejores estimaciones se pueden obtener aplicando el método de los mínimos cuadrados [3].

Para efectuar estas estimaciones se organizan los datos disponibles en una distribución de frecuencias que proporcione un conjunto de pares de valores para el ajuste. Si a y b son los estimadores de α y β , respectivamente estos se obtienen resolviendo el sistema:

$$\sum_{i=1}^n \log X_i = n a + b \sum_{i=1}^n \log Y_i \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \log X_i \log Y_i = a \sum_{i=1}^n \log Y_i + b \sum_{i=1}^n (\log Y_i)^2$$

donde:

$(X_i, Y_i) =$ La i -ésima observación en la muestra

$n =$ Total de valores observados en la muestra.

Un punto crucial en el proceso de estimación de la función está en la escogencia del nivel de ingreso mínimo. Este no puede tomarse como cero pues dificultaría el cálculo de la regresión por no existir el logaritmo para cero, y tampoco puede tomarse muy alto pues tendería a sesgar la estimación del coeficiente β . Lo más conveniente entonces es escoger como ingreso mínimo el menor ingreso observado que satisfaga los requerimientos del cálculo. Sin embargo, cuando este ingreso mínimo no es confiable se puede optar por dos alternativas para determinarlo. La primera consiste en ignorar el primer par de valores en la distribución de frecuencias y emplear con las restantes el método de los mínimos cuadrados. Este método se puede usar cuando el nivel mínimo de ingreso es muy bajo pero tiene la tendencia a producir estimaciones sesgadas del coeficiente β . [5].

Una segunda alternativa para el ajuste es aplicar el método de los cuartiles. [5]. Según este procedimiento se seleccionan dos cuartiles Q_1 y Q_2 que representan los porcentajes de la población que recibe un ingreso menor o igual a Y_1 y Y_2 respectivamente. La función de distribución de Pareto se expresa como:

$$F(Y) = 1 - \left[\frac{Y_0}{Y} \right]^b \quad (4)$$

con lo cual conocidos los niveles de ingreso que corresponden a los dos cuartiles se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas Y_0 y b .

Generalmente se trabaja con los cuartiles uno y tres definidos como sigue [6]:

$$Q_1 = L_i + \frac{\frac{n}{4} - \sum f_i}{f_{media}} \quad (5)$$

$$Q_3 = L_i - \frac{\frac{3n}{4} - \sum f_i}{f \text{ media}} c \quad (6)$$

donde:

Q_1 y Q_3 = Cuartiles uno y tres respectivamente

n = Total de informantes

L_i = Limite inferior del intervalo de ingreso que contiene la cantidad $n/4$ para Q_1 y $3n/4$ para Q_3

$\sum f_i$ = Acumulado de informantes (frecuencia acumulada) hasta el intervalo de ingreso que contiene las cantidades $n/4$ y $3n/4$ para Q_1 y Q_3 respectivamente

$f \text{ media}$ = Número de personas (frecuencia relativa) en el intervalo de ingreso que contiene las cantidades $n/4$ y $3n/4$ para los cuartiles Q_1 y Q_3 .

c = Intervalo de clase (longitud de los intervalos de ingreso)

Mediante los cuartiles enunciados se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 - \left[\frac{Y_0}{Y_1} \right]^b \\ Q_3 &= 1 - \left[\frac{Y_0}{Y_2} \right]^b \end{aligned} \quad (7)$$

que al ser resuelto produce las estimaciones Y_0 y b . El valor del ingreso mínimo así obtenido es siempre aceptable pero con un valor de b generalmente menor que 1. Por eso, con este valor de Y_0 sería más aconsejable llegar a estimar el coeficiente β a través del método de mínimos cuadrados.

3. CALCULO DE ERRORES.

Cuando se usa el método de los mínimos cuadrados para obtener las estimaciones de α y β , se puede calcular los errores de estas estimaciones haciendo uso de las siguientes expresiones: [4]:

$$\text{var (a)} = \frac{\hat{\sigma}^2 n^2 \sum Y_i^2}{n \sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (8)$$

$$\text{var (b)} = \frac{\hat{\sigma}^2 n^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (9)$$

donde:

$$\hat{\sigma}^2_{n2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (X_i - a - b Y_i)^2 \quad (10)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (11)$$

Partiendo de aquí y bajo las hipótesis de una distribución normal se obtienen estimaciones por intervalo de confianza para los parámetros α y β como sigue:

$$P_r [a - t(\alpha, g) \sqrt{\text{var}(a)} \leq \alpha \leq a + t(\alpha, g) \sqrt{\text{var}(a)}] = 1 - \alpha \quad (12)$$

$$P_r [b - t(\alpha, g) \sqrt{\text{var}(b)} \leq \beta \leq b + t(\alpha, g) \sqrt{\text{var}(b)}] = 1 - \alpha \quad (13)$$

donde:

α y β : Parámetros a estimar

a y b : Estimaciones por mínimos cuadrados de α y β

$\sqrt{\text{var}(a)}$: Error del coeficiente a

$\sqrt{\text{var}(b)}$: Error del coeficiente b

$t(\alpha, g)$: Valor en la distribución t

α : Nivel de significación

g : Grados de libertad

La magnitud del error de cada uno de los coeficientes permite formar una idea del grado de confianza que puede tenerse en el ajuste. Generalmente cuando el error del coeficiente es próximo o mayor que la estimación se considera que el ajuste es muy deficiente y en estas circunstancias no tiene mucho sentido calcular estimaciones por intervalo pues estas resultan tan amplias que carecen de utilidad práctica (*). Para que todos los cálculos mencionados sean válidos se debe cumplir el supuesto de que todos los errores de observación no esten correlacionados, o dicho en otras palabras que un error de observación en una medida cualquiera no sea influenciado ni esté influenciando sobre cualquiera de los restantes errores. Esto es lo que se conoce como la existencia de autocorrelación serial [4] la cual puede ser verificada a través de estimaciones de coeficientes Durbin - Watson [14].

4. PROPIEDADES DE LA FUNCION DE PARETO.

La elaboración de cálculos como los descritos antes se ven justificados en la práctica gracias a algunas

(*) Se ha encontrado que la función de Pareto brinda buenos ajustes para valores superiores de ingreso, pero no así para niveles inferiores [12].

propiedades importantes que pueden desprenderse de la distribución de Pareto y la estimación de algunos datos específicos de mucha utilidad en el análisis de la distribución del ingreso. A continuación se señalan algunas de las más importantes aplicaciones.

a) Ingreso Promedio

Si se considera el nivel de ingreso como una variable aleatoria con una función de distribución acumulativa dada por la ecuación (2), al aplicar el concepto de esperanza matemática a la función se obtiene el ingreso promedio Y expresado a través de la función:

$$Y = \frac{\beta Y_0}{\beta - 1} \quad (14)$$

Mediante esta función es posible estimar el ingreso promedio haciendo a la vez uso de la estimación b del parámetro β .

Se observa que esta estimación es directamente proporcional al ingreso mínimo escogido Y_0 por lo cual es de suma importancia la escogencia de un nivel lo más preciso y aceptable posible. Una vez definido el ingreso mínimo, este se considera constante para todos los cálculos, mientras que el ingreso promedio constituye una variable aleatoria dependiente de b que a su vez es otra variable aleatoria. Bajo estas consideraciones se puede obtener una estimación por intervalo del ingreso promedio dentro de un intervalo de confianza definido previamente para β . Bastará con reemplazar en la ecuación (14) a β por el límite inferior (o superior) del intervalo construido en (13) para obtener el límite superior (o inferior) del ingreso promedio.

b) Porcentaje Acumulativo de Perceptores de Ingreso

Otra interesante propiedad de la curva de Pareto es la de permitir calcular el porcentaje o fracción acumulativa de perceptores de ingreso W_x que reciben un ingreso mayor o igual a un nivel Y_x (*). Para ello [5] se integra la función de densidad de Pareto desde Y_0 hasta el nivel Y_x con lo cual se obtiene la expresión:

$$W_x = 1 - \left(\frac{Y_x}{Y_0} \right)^{-\beta} \quad (15)$$

Este valor W_x puede ser determinado después de fijar el nivel de ingreso Y_x , el nivel mínimo de ingreso Y_0 y a través de la estimación b de β .

c) Porcentaje Acumulativo de Ingresos

Estableciendo la razón que existe entre el ingreso total que reciben las personas que tienen un ingreso mayor o igual a un nivel Y_x y el ingreso total de la comunidad, se puede obtener el porcentaje o fracción acumulativa de ingreso Z_x que es recibido por las personas que tienen un ingreso superior o igual al nivel Y_x . La expresión resultante es:

$$Z_x = 1 - \left(\frac{Y_x}{Y_0} \right)^{1-\beta} \quad (16)$$

(*) Ver apéndice.

Como Y_0 y Y_X una vez determinados son constantes se puede obtener estimaciones por intervalo de las expresiones. (15) y (16) aplicando igual método sugerido para el caso de la estimación del ingreso promedio.

5. RESULTADOS PRACTICOS.

Con el ánimo de aplicar y presentar un análisis detallado de la distribución de ingreso para Colombia y Ecuador se han aplicado los métodos antes descritos aprovechando los resultados de encuestas de hogares efectuadas en cada uno de estos países [7] y [9].

5.1 Ajustes de la Función de Pareto

Tal como se mencionó anteriormente el problema fundamental en el proceso de estimación de la función reside en la escogencia del ingreso mínimo. Para los cálculos aquí efectuados se le ha dado el valor de \$250.00 que corresponde a la media del primer intervalo de ingresos considerado en la distribución total (Tabla 1).

Aplicando el sistema de ecuaciones normales a la referida distribución se obtiene que los estimadores de β y α , son:

$$a = 5.8397 \quad y \quad b = 1.4593$$

En este caso el valor del coeficiente b es mayor que la unidad, y por lo mismo se considera aceptable la definición del ingreso mínimo. Sin embargo no sucede lo mismo en otros casos y por lo tanto debe recurrirse a un procedimiento diferente para estimar el ingreso mínimo Tal es el caso observado para el Ecuador [9], en el cual se tiene que recurrir a la segunda alternativa propuesta para la definición del ingreso mínimo, esto es a través de método de los cuartiles (*). Se seleccionaron dos cuartiles $Q_1=.25$ y $Q_2=.75$ para que representen a los porcentajes de la población total que recibe un ingreso mayor o igual a dos ingresos que pueden distinguirse como Y_1 y Y_2 respectivamente. Aplicando la función de Pareto (4)

$$F(Y) = 1 - \left[\frac{Y_0}{Y} \right]^b$$

y haciendo uso de los niveles Y_1 y Y_2 de ingresos se obtiene el sistema (7) de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas Y_0 y b:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 - \left[\frac{Y_0}{Y_1} \right]^b \\ Q_2 &= 1 - \left[\frac{Y_0}{Y_2} \right]^b \end{aligned}$$

(*) Ver punto 2.1

que permitirá estimar el ingreso mínimo Y_0 . El paso intermedio es la determinación de los niveles Y_1 y Y_2 . Para esto se utilizan las funciones (5) y (6) en las cuales el cuartil 1 corresponde a Y_1 y el cuartil 3 al nivel Y_2 (*). Los resultados obtenidos, con base en la tabla 2, son los siguientes:

$$Q_1 = 200 + \frac{147.886,5 - 44.601}{106.617} 200 = 393,75$$

$$Q_3 = 1.000 + \frac{443.665,5 - 384.489}{125.185} 1.000 = 1.472,71$$

$$(Y_1) : Q_1 = 393,75 \quad (Y_2) : Q_3 = 1.472,71$$

Con estos datos el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$0.25 = 1 - \left[\frac{Y_0}{393,75} \right]^b$$

$$0.75 = 1 - \left[\frac{Y_0}{1.472,71} \right]^b$$

De donde :

$$b = 0,520605 \quad Y_0 = 684.15$$

Puede observarse que el valor de b no es aceptable (**) pero no así el ingreso mínimo. Utilizando este ingreso con el método de mínimos cuadrados, se obtiene que b es 1.4566, valor aceptable para el ajuste.

Todos los cálculos de estimaciones para Colombia que se consignan en las tablas de resultados se hicieron únicamente por el método de regresión mínimo cuadrática. Algunos de ellos (los señalados en las tablas de resultados con asteriscos) no pueden considerarse confiables ya sea por: a) su alto error; b) escaso número de observaciones y c) niveles mínimos de ingreso de poca representatividad. No obstante se puede observar que siempre existe un alto grado de correlación entre las variables (porcentaje de perceptores de ingreso y nivel de ingreso) generalmente mayor del 90o/o. Además los ajustes son aceptables pues no se presentan, según el coeficiente de Durbin Watson, problemas de autocorrelación serial.

5.2 Estimación del Ingreso Promedio

Como se indicó, el ingreso promedio según la distribución de Pareto viene dado por la función (14):

(*) Puede utilizarse cualquier par de cuartiles. En el caso presente se ha preferido utilizar el 1o. y 3er. cuartiles (0.25 y 0.75).

(**) Según el planteamiento de la función, "b" debe ser mayor o igual a la unidad.

$$\bar{Y} = \frac{b Y_0}{b - 1}$$

Siendo b el coeficiente de regresión, estimación de β , y Y_0 el ingreso mínimo. Para el caso colombiano, utilizando el valor de $b = 1.4593$ ya estimado y el ingreso mínimo para el total nacional de \$250.00 se tiene:

$$\bar{Y} = \frac{(1.4593)(250)}{1.4593 - 1} = \$ 794.31$$

Sin embargo como el valor de b depende de Y_0 , esta estimación tiene más sentido si se la da por intervalo. Aplicando la función (12) puede determinarse que el intervalo de confianza para b es:

$$P_r [1.4593 - (2.12)(0.0726) \leq \beta \leq 1.4593 + (2.12)(0.0726)] = 0.95$$

$$P_r [1.3054 \leq \beta \leq 1.6132] = 0.95$$

Esto significa que el verdadero valor de β se encuentra entre 1.3054 y 1.6132 con una probabilidad del 95o/o. Reemplazando el límite inferior del intervalo en la ecuación (14) el estimativo del ingreso promedio para un ingreso mínimo de \$250.00 será, para los límites inferior y superior, respectivamente:

$$\bar{Y}_1 = \frac{(1.3054)(250)}{1.3054 - 1} = \$ 1.068.60$$

$$Y_2 = \frac{(1.6132)(250)}{1.6132 - 1} = \$657.70$$

lo cual significa que el intervalo de confianza para el ingreso promedio expresado en función de b y suponiendo constante el ingreso mínimo (\$250.00) puede expresarse como:

$$P_r [\$657.70 \leq \bar{Y} \leq \$ 1.068.60] = 0.95$$

que determinaría que el ingreso promedio para Colombia, haciendo uso de los métodos ya descritos y con un nivel de confianza del 95o/o, está entre \$657.70 y \$1.068.60. Esto concuerda con los resultados de publicaciones anteriores [8] en los cuales la estimación directa del ingreso promedio es de \$1.060.00 correspondiente a un promedio aritmético ponderado.

Para el caso ecuatoriano, aplicando el método de mínimos cuadrados la función de Pareto es:

$$\log X = 4.9648 - 1.16491 \log Y$$

El ingreso mínimo utilizado para el ajuste fué de \$200.00 sucres.

La estimación por intervalo que corresponde al coeficiente b, siguiendo idéntico método al utilizado para el caso colombiano, es la siguiente:

$$P_r [1.1649 - 2.23 (0.089) \leq \beta \leq 1.1649 + 2.23 (0.089)] = 0.95$$

$$P_r [0.9664 \leq \beta \leq 1.3634] = 0.95$$

En este caso el límite inferior es menor que 1 valor no aceptable para el coeficiente b aunque se acerca a la unidad.

El ingreso promedio para el Ecuador se estimaría en:

$$\bar{Y} = \frac{(1.1649)(200)}{1.1649 - 1} = \$ 1.412.85$$

La estimación por intervalo del ingreso promedio no tiene mucho sentido en este caso por cuanto al considerar el límite inferior de b se obtiene un ingreso promedio que tiende a infinito. Tomando el límite superior de b el límite inferior para el ingreso promedio será:

$$Y_{\cdot} = \frac{(1.3634)(200)}{1.3634 - 1} = \$750.36$$

5.3 Fracciones de Ingreso y Población que Corresponden a un Nivel Cualquiera de Ingreso.

De acuerdo a la ecuación (15) y para un supuesto $Y_x = \$750.00$ se tiene para el caso colombiano:

$$W_x = 1 - \left[\frac{750}{250} \right]^{-1.4593} = 79.880/o$$

Esto indica que el 79.880/o de la población tiene ingresos menores o iguales a \$750.00.

Si se quiere estimar la fracción acumulativa de ingreso (16) se tiene que:

$$Z_x = 1 - \left[\frac{750}{250} \right]^{-1.4593} = 39.620/o$$

Lo que significa que entre todas las familias colombianas con un ingreso menor o igual a \$750.00, alcanzan a recibir el 39.620/o del ingreso total.

Para el caso ecuatoriano la fracción acumulativa de perceptores de ingreso W_x que reciben un ingreso menor o igual a \$700 sucres será:

$$W_x = 1 - \left(\frac{750}{200} \right)^{-1.1649} = 90.44\%$$

La fracción acumulativa de ingreso Z_x recibida por este mismo tipo de unidades receptoras será:

$$Z_x = 1 - \left(\frac{700}{200} \right)^{-1.1649} = 28.27\%$$

O sea que en el área urbana de Ecuador las personas que reciben un ingreso menor o igual a \$700 sucres captan el 28.27% del ingreso total de la referida área.

6. GRAFICO DE PARETO.

Este gráfico se construye colocando en el eje horizontal los logaritmos de los niveles de ingreso, y en el vertical los logaritmos de los porcentajes acumulados de perceptores de ingreso. El gráfico 1 muestra las curvas referentes a la función de Pareto para Colombia total nacional y por áreas urbana y rural. Se indica además los resultados de las funciones ajustadas. Como puede observarse se trata de funciones acumulativas que permiten conocer el nivel de ingreso que corresponde a un determinado porcentaje de perceptores de ingreso. Así por ejemplo, del gráfico 1 es fácil deducir que el 20% de la población urbana de Colombia recibe un ingreso de aproximadamente \$1.900.00 o más, o que el 80% de esta población tiene ingresos inferiores a los \$1.900.00. Este tipo de resultados también puede obtenerse para un determinado rango de ingreso. Bastará con restar el porcentaje acumulado de personas que corresponde al límite superior del rango considerado el porcentaje acumulado de personas que corresponde al límite inferior de dicho rango. Para el ejemplo, en el total de la población colombiana el porcentaje de personas que reciben un ingreso comprendido entre \$1.000.00 y \$2.000.00 es aproximadamente de 26% (.38 - .12 = .26).

Como una medida del grado de concentración del ingreso en la distribución, Pareto sugirió originalmente que cuanto menor fuese la pendiente β de la ecuación mayor sería el grado de desigualdad. No obstante desde el punto de vista estadístico una distribución tiene menor varianza (mayor grado de concentración) cuanto mayor sea el número de unidades que se concentran alrededor del promedio. En el gráfico 1 la menor pendiente corresponde a la ecuación del total urbano y según la interpretación Paretiana esta distribución sería la más igualitaria. Sin embargo, si se dibujan los promedios de ingreso que corresponden a las tres distribuciones (líneas verticales en el gráfico), y se buscan los puntos de corte entre estos promedios y la curva de Pareto que les corresponde, se ve que el punto de intersección más alto corresponde al área rural pues allí aproximadamente el 56% de las personas tienen un ingreso superior al promedio aritmético ponderado (\$580.00). Este último tipo de medida de concentración de ingreso resulta más confiable y concuerda con los resultados de los otros tipos de análisis más adelante presentados.

En el gráfico 2 se representan ajustes de las funciones de Pareto para el área urbana de Ecuador, discriminado por sexos (*). Se puede observar que el mayor promedio de ingreso corresponde a los hombres los cuales a su vez manifiestan mayor grado de igualdad en la distribución. En este caso el coeficiente α tiene su menor valor para la distribución de ingresos de los hombres, aunque es la que tiene menor correlación, mayor desviación estándar y más problemas de autocorrelación. Por lo anterior, este ajuste, desde el punto de vista estadístico, tiene menor confiabilidad en comparación con las tres distribuciones antes consideradas.

(*) Fuente de información estadística Encuesta de Hogares Área Urbana. Junta Nacional de Planificación. Quito, Ecuador, 1968. [9].

TABLA No. 1
COLOMBIA
DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS EMPLEADAS EN LAS
TABULACIONES -TOTAL NACIONAL-

Código	Intervalo de Ingreso (Pesos)		Frecuencia
1	0	— 500.	5.994
2	501.	— 1.000.	4.790
3	1.001.	— 1.500.	1.846
4	1.501.	— 2.000.	870
5	2.001.	— 2.500.	447
6	2.501.	— 3.000.	216
7	3.001.	— 4.000.	278
8	4.001.	— 5.000.	159
9	5.001.	— 6.000.	105
10	6.001.	— 7.000.	59
11	7.001.	— 10.000.	99
12	10.001.	— 15.000.	70
13	15.001.	— 20.000.	19
14	20.001.	— 25.000.	30

FUENTE; Encuesta de Hogares DANE - 1970

TABLA No. 2
ECUADOR
DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS ACUMULADAS
PARA CALCULAR EL INGRESO MINIMO
POR EL METODO DE LOS CUARTILES
- AREA URBANA ,

Intervalo de ingresos			Frecuencia (sucres)	Frecuencia acumulada
0	—	200.	44.601	44.601
201	—	400.	106.617	151.218
401	—	600.	95.202	246.420
601	—	800.	74.453	320.873
801	—	1.000.	63.616	384.489
1.001	—	2.000.	125.185	509.674
2.001	—	3.000.	36.041	545.715
3.001	—	4.000.	17.734	563.449
4.001	—	5.000.	6.815	570.264
5.001	—	7.000.	9.713	579.977
7.001	—	9.000.	4.209	584.186
9.001	—	11.000.	7.368	591.554
$\frac{N}{4} = 147.888,5$			$\frac{3N}{4} = 443.665,5$	

FUENTE: Encuesta de Hogares. Area urbana. Junta Nacional de Planificación, División de estadística y Censos 1968.

GRAFICO No. 1
COLOMBIA
GRAFICO DE PARETO

Log del o/o acumulado de personas

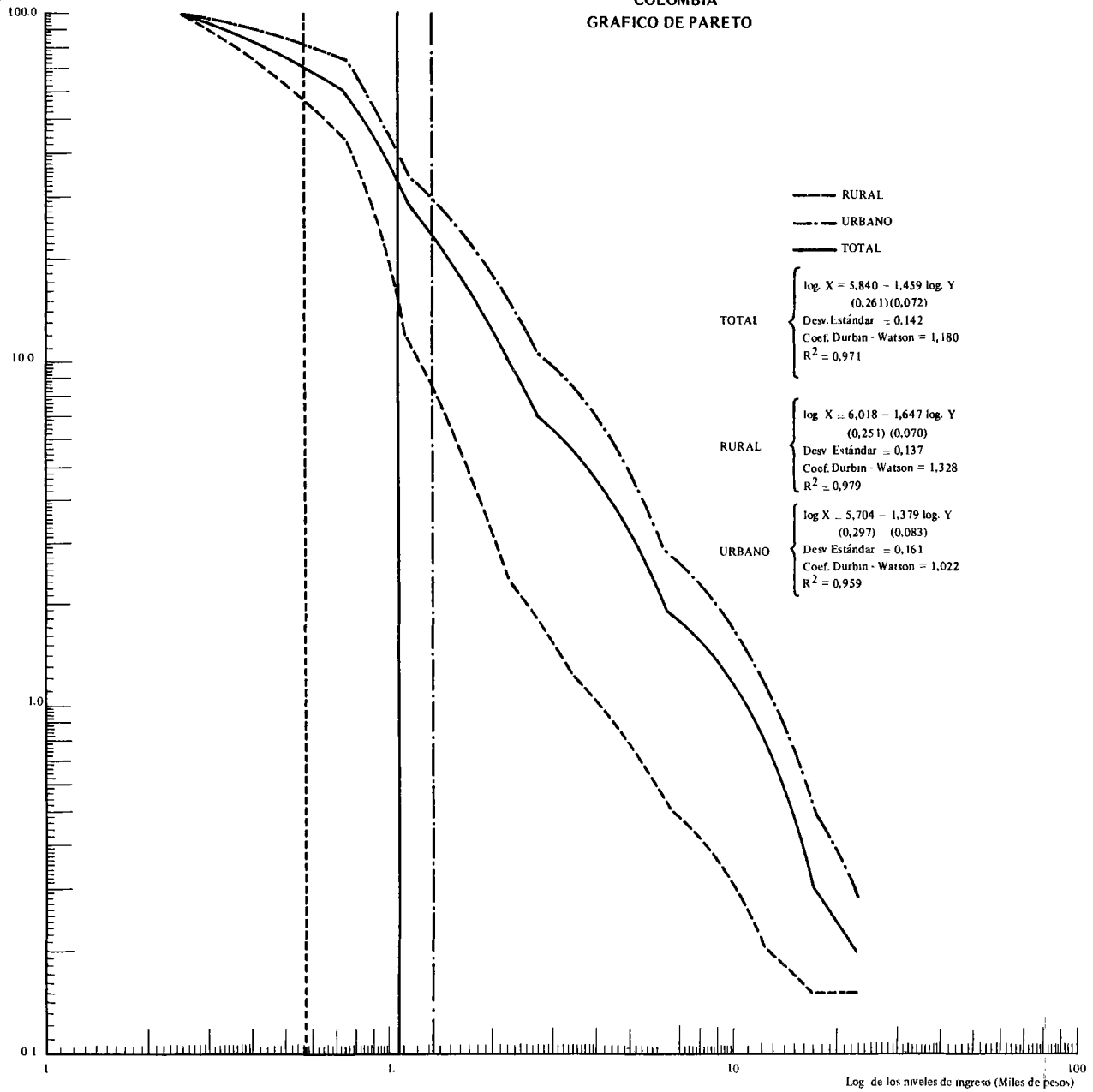
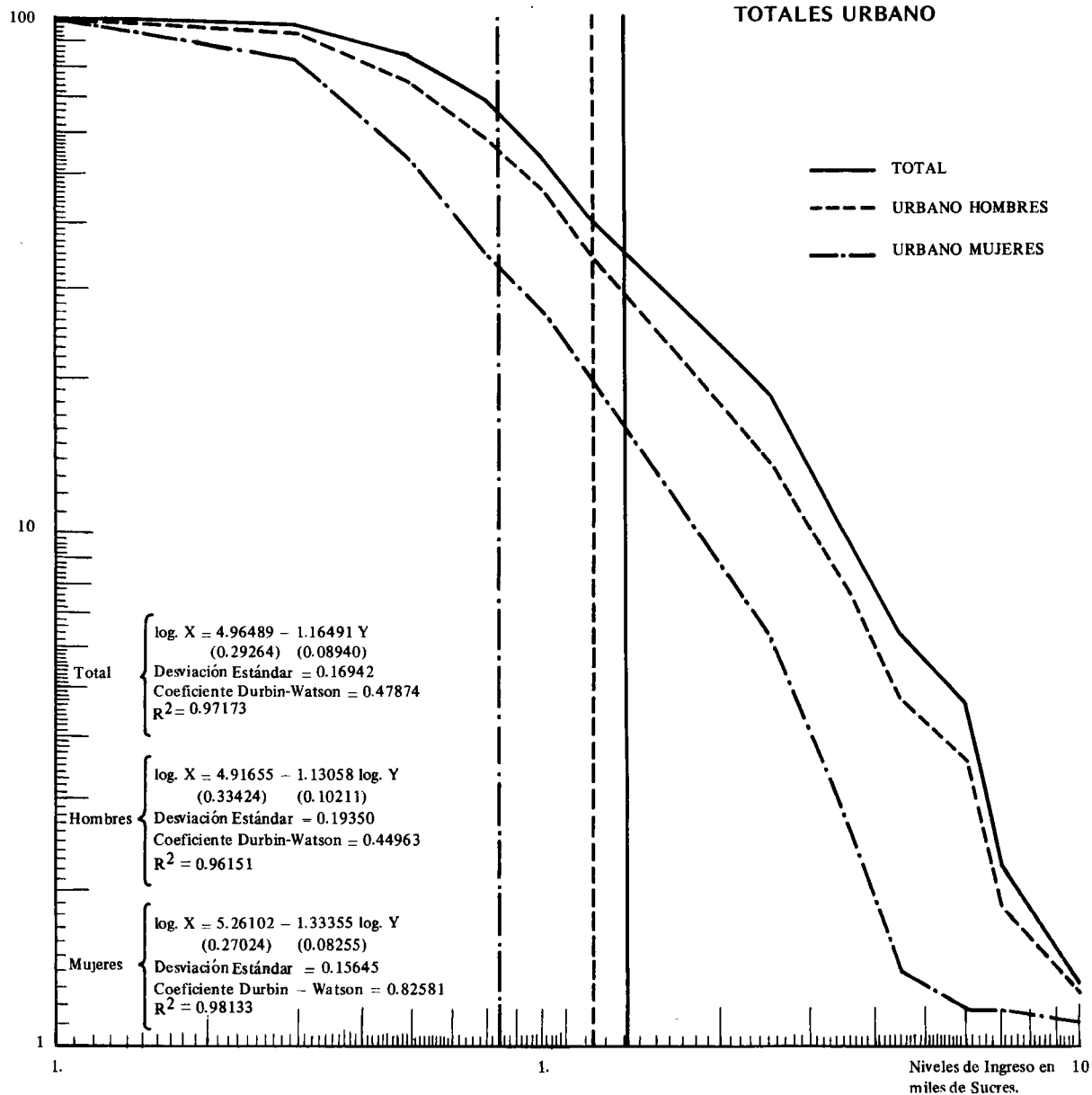


GRAFICO No. 2
ECUADOR
GRAFICO DE PARETO
TOTALES URBANO

Log. del o/o acumulado de personas



TABLAS DE RESULTADOS

El resumen de los ajustes obtenidos para Colombia y Ecuador se presenta a continuación en las tablas 3 a 18. Estas tablas se han organizado en 11 columnas, con el siguiente contenido: -

Columna (1).

Describe el universo al cual se refieren los datos.

Columna (2).

Se han colocado aquí las letras N-C para identificar los ajustes que proporcionan estimaciones no confiables de los parámetros. Las principales causas de esta no confiabilidad son entre otras: a) El escaso número de puntos tomados para el ajuste, b) Niveles mínimos de ingreso de poca representatividad, c) Valores muy altos en los errores de las estimaciones, d) Valores inadmisibles para el coeficiente b (generalmente menores a uno), y e) Problemas de autocorrelación serial.

Columnas (3) y (4).

Contiene el estimador "a" del coeficiente α , con su respectiva estimación. El coeficiente "a" se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones (3) y su error es la raíz cuadrada del valor obtenido en la ecuación (8).

Columnas (5) y (6)

Contienen en su orden el estimativo b de β , obtenido al resolver el sistema de las ecuaciones (3), y el error de esta estimación calculada según la ecuación (9).

Columna (7)

Se ha anotado aquí el error estándar de la estimación de cada regresión, a través de la ecuación (10).

Columna (8).

Contiene el coeficiente de correlación que mide el grado de asociación lineal (logarítmica) entre las variables estudiadas.

Columnas (9) y (10).

En la primera se ha anotado el valor del coeficiente Durbin Watson, mientras que en la segunda se da el resultado de la prueba. Para ello se coloca un asterisco (*) cuando la prueba resulta significativa, denunciando problemas de autocorrelación. Cuando la prueba indica indecisión de existencia de autocorrelación se han colocado las letras N.D. Finalmente, si la prueba no ha resultado significativa, esto es, no se manifiestan problemas de autocorrelación serial, se ha dejado el espacio en blanco.

Columna (11)

Se han anotado los valores t (α , g) de la distribución t de Student necesarios para hacer las estimaciones por intervalo que se deseen según los métodos explicados anteriormente. El nivel de significación empleado es del 50/o ($\alpha=0.05$).

TABLA 3
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESO DE PARETO
POR AREAS Y SEXOS

Area-Sexo		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t(α ,g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Hombres										
Total		5.8670	0.3042	1.4534	0.0847	0.1654	0.9802	0.9802	N.D	2.18
Urbano		5.5440	0.3262	1.3014	0.0908	0.1773	0.9720	0.8670	*	2.18
Rural		6.2735	0.2765	1.7250	0.0770	0.1503	0.9882	1.6267	—	2.18
Mujeres										
Total		6.9399	0.4186	1.8865	0.1209	0.1921	0.9800	1.2069	N.D	2.23
Urbana		6.6486	0.4031	1.7730	0.1164	0.1850	0.9791	1.2607	—	2.23
Rural		8.1325	0.6570	2.4554	0.1966	0.2564	0.9753	1.1514	N.D	2.31

TABLA 4
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESO DE PARETO

POR REGIONES Y AREAS

Región-Area		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t(α , g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Pacífica										
Total		5.9882	0.2675	1.5332	0.0744	0.1454	0.9861	1.1328	N.D	2.18
Urbana		6.0699	0.3950	1.5125	0.1099	0.2147	0.9697	0.9513	N.D.	2.18
Rural		5.7899	0.2812	1.6187	0.0783	0.1529	0.9862	1.0911	N.D	2.18
Central										
Total		5.9343	0.2654	1.5095	0.0739	0.1443	0.9859	1.6937	—	2.18
Rural		6.2199	0.3615	1.7357	0.1006	0.1965	0.9804	0.9301	N.D	2.18
Urbana		5.8347	0.3139	1.4339	0.8735	0.1706	0.9784	1.4143	—	2.18
Bogotá										
Total		5.5941	0.3531	1.3089	0.0983	0.1919	0.9678	0.7881	*	2.18
Urbana		5.5981	0.3526	1.3104	0.0981	0.1917	0.9679	0.7972	*	2.18
Rural		5.2907	0.9454	8.1272	1.9430	0.2513	0.9022	1.2907		2.78
Oriental										
Total		5.7870	0.1802	1.4932	0.0501	0.0980	0.9933	1.8287	—	2.18
Rural		5.7023	0.2770	1.5437	0.0771	0.1506	0.9853	0.9929	N.D	2.18
Urbana		5.7971	0.2452	1.4418	0.0682	0.1333	0.9868	1.3388	—	2.18
Atlántica										
Total		5.7418	0.2508	1.4301	0.0698	0.1364	0.9860	1.3853	—	2.18
Rural		6.4401	0.3258	1.7419	0.0941	0.1495	0.9857	1.8506	—	2.23
Urbana		5.4275	0.2411	1.2967	0.0671	0.1310	0.9843	1.2941	—	2.18

TABLA 5
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESO DE PARETO
POR ACTIVIDADES
TOTAL NACIONAL (P.E.A)*

Actividad		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t (α, g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Servicios comunales sociales y personales		5.9808	0.3178	1.4792	0.0884	0.1727	0.9792	0.9931	N.D	2.18
Establecimientos financieros		5.3127	0.4560	1.1645	0.1269	0.2479	0.9355	0.6092	*	2.18
Transporte y comunicaciones		6.5750	0.5201	1.6404	0.1447	0.2827	0.9563	0.8516	*	2.18
Comercio, restaurantes, hoteles		5.6031	0.3081	1.3441	0.0857	0.1675	0.9764	0.9170	*	2.18
Construcción		5.2317	0.2295	1.2596	0.0639	0.1248	0.9849	1.8205	—	2.18
Electricidad, gas y agua		5.2227	0.3155	1.2018	0.0878	0.1715	0.9694	0.1360	*	2.18
Industria manufacturera		6.2049	0.3732	1.5716	0.1039	0.2029	0.9748	0.9753	N.D.	2.18
Minas y canteras		5.0187	0.4168	1.1466	0.1204	0.1913	0.9491	0.8520	*	2.23
Agricultura, caza y pesca		5.8075	0.2019	1.5607	0.0562	0.1097	0.9923	1.6656	—	2.18

(*) P.E.A.: Población Económicamente Activa.

TABLA 6
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESO DE PARETO POR ACTIVIDADES
AREA URBANA (P.E.A.)

Actividades		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t (α, g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Servicios comunales sociales y personales		6.0313	0.3479	1.4850	0.0968	0.1891	0.9754	0.8990	*	2.18
Establecimientos financieros		5.2527	0.4379	1.1445	0.1219	0.2381	0.9381	0.6372	*	2.18
Transporte y comunicaciones		6.2028	0.4383	1.5166	0.1220	0.2383	0.9633	0.9015	*	2.18
Comercio, restaurante hoteles		5.4322	0.2788	1.2828	0.0776	0.1515	0.9787	1.0177	N.D.	2.18
Construcción		5.1353	0.2318	1.2183	0.0645	0.1260	0.9835	1.7975	—	2.18
Electricidad, gas y agua		5.1852	0.3157	1.1848	0.0879	0.1716	0.9685	1.3407	—	2.18
Industria manufacturera		6.2411	0.4222	1.5683	0.1175	0.2295	0.9679	0.9695	N.D.	2.18
Minas y canteras		4.9375	0.4756	1.0878	0.1374	0.2183	0.9288	0.7873	*	2.23
Agricultura, caza y pesca		5.2246	0.1582	1.2791	0.0440	0.0860	0.9929	1.9686	—	2.18

TABLA 7
COLOMBIA

PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESOS DE PARETO POR ACTIVIDADES
AREA RURAL

Actividades		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t (α, g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Servicios	N.C.	8.3790	1.1406	2.4672	0.3539	0.3821	0.9434	1.1305	N.D.	2.45
Establecimientos financieros	N.C.	3.5189	0.3620	0.6366	0.1083	0.1413	0.9016	1.1644	N.D.	2.31
Transporte y comunicaciones		5.9824	0.5198	1.5302	0.1530	0.2186	0.9578	1.4160	—	2.26
Comercio, restaurante, hoteles		5.5464	0.23933	1.4179	0.0704	0.1006	0.9891	2.0847	—	2.26
Construcción		6.0306	0.6617	1.5872	0.2096	0.2023	0.9591	1.9055	—	2.57
Eléctricidad, gas y agua	N.C.	3.9997	0.4878	0.8247	0.1739	0.0878	0.9771	2.9148	N.D.	12.71
Industria manufacturera		6.1329	0.3253	1.6775	0.0955	0.1383	0.9857	1.9135	—	2.26
Minas y canteras		4.5771	0.3862	1.1042	0.1136	0.1624	0.9505	1.5351	—	2.26
Agricultura		7.0867	0.4324	2.0236	0.1249	0.1984	0.9815	1.9360	—	2.23

TAB LA 8
COLOMBIA

PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESO DE PARETO POR NIVEL OCUPACIONAL
Total Nacional (P.E.A.)

Nivel Ocupacional		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t (α, g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Profesionales técnicos	N.C.	4.9085	0.5003	1.0010	0.1392	0.2720	0.9009	0.5149	*	2.18
Profesionales no técnicos		5.2931	0.3677	1.1689	0.1023	0.1999	0.9569	0.7596	*	2.18
Directores y funcionarios públicos superiores	N.C.	3.8026	0.3818	0.5995	0.1062	0.2075	0.8519	0.3930	*	2.18
Personal administrativo y similares		6.1687	0.4527	1.4883	0.1258	0.2457	0.9597	0.7715	*	2.18
Comerciantes y vendedores		5.4038	0.3382	1.2619	0.0941	0.1839	0.9681	0.7646	*	2.18
Trabajadores de los servicios		6.3223	0.3601	1.7356	0.1002	0.1958	0.9805	1.1342	N.D.	2.18
Trabajadores agrícolas y forestales		5.7769	0.2410	1.5643	0.0670	0.1310	0.9881	1.2996	—	2.18
Obreros no agrícolas		6.6992	0.3900	1.8158	0.1127	0.1790	0.9813	1.4152	—	2.23
Artesanos y operarios		7.3102	0.6213	1.9687	0.1729	0.3377	0.9567	0.8255	*	2.18
Jornaleros y conductores no especificados		6.7817	0.4867	1.8015	0.1406	0.2234	0.9709	1.2410	—	2.23
Total		5.8397	0.2609	1.4593	0.0726	0.1418	0.9854	1.1795	N.D.	2.18

TABLA 9
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESO DE PARETO POR NIVEL OCUPACIONAL
Area Urbana (P.E.A.).

Nivel Ocupacional		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		$t(\alpha, g)$
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Profesionales técnicos	N.C.	4.9801	0.5349	1.0212	0.1488	0.2908	0.8925	0.5082	*	2.18
Profesionales no técnicos		5.2279	0.3726	1.1407	0.1037	0.2026	0.9538	0.7162	*	2.18
Directores y funcionarios públicos superiores	N.C.	3.8517	0.4029	0.6142	0.1121	0.2190	0.8450	0.3923	*	2.18
Personal administrativo y similares		6.1552	0.4555	1.4816	0.1268	0.2476	0.9587	0.7834	*	2.18
Comerciantes y vendedores		5.3771	0.3545	1.2447	0.0986	0.1927	0.9643	0.6974	*	2.18
Trabajadores de los servicios		6.4235	0.3730	1.7582	0.1038	0.2028	0.9797	1.1701	N.D.	2.18
Trabajadores agrícolas y forestales		5.3904	0.1867	1.3551	0.0519	0.1015	0.9912	2.1420	—	2.18
Obreros no agrícolas		6.8831	0.4505	1.8577	0.1301	0.2068	0.9763	1.1450	N.D.	2.23
Artesanos y operarios		7.3731	0.6617	1.9863	0.1841	0.3597	0.9521	0.8091	*	2.18
Jornaleros y conductores no especificados		6.9757	0.5584	1.8572	0.1613	0.2563	0.9643	1.0815	N.D.	2.23
Total		5.7036	0.2968	1.3789	0.0826	0.1614	0.9791	1.0219	N.D.	2.18

TABLA 10
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESOS DE PARETO
POR NIVEL OCUPACIONAL
AREA RURAL (P.E.A.)

Nivel Ocupacional		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		$t(\alpha, g)$
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Profesionales técnicos		4.2222	0.3805	0.8209	0.1078	0.1909	0.9168	0.9792	N.D.	2.20
Profesionales no técnicos		6.7193	1.9944	1.7885	0.6460	0.5543	0.8107	1.2461	—	2.78
Directores y funcionarios públicos superiores		3.3352	0.2162	0.4695	0.0602	0.1175	0.9132	0.9793	N.D.	2.18
Personal administrativo y similares		4.6462	0.3681	1.0398	0.1142	0.1233	0.9656	1.5063	—	2.45
Comerciantes y vendedores		5.7446	0.3095	1.4681	0.0911	0.1301	0.9831	1.6173	—	2.26
Trabajadores de los servicios		6.5371	0.5397	1.8701	0.1615	0.2106	0.9714	1.4315	—	2.31
Trabajadores agrícolas y forestales		6.8135	0.3589	1.9445	0.1037	0.1647	0.9861	1.5102	—	2.23
Obreros no agrícolas		6.2107	0.5477	1.7430	0.1612	0.2303	0.9636	0.7710	*	2.26
Artesanos y operarios		6.4255	0.6402	1.7314	0.1949	0.2327	0.9584	1.4415	—	2.36
Jornaleros y conductores		6.3865	0.4680	1.7312	0.1377	0.1968	0.9727	1.4843	—	2.26
Total		6.0177	0.2515	1.6474	0.0700	0.1367	0.9893	1.3279	—	2.18

TABLA 11
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESOS DE PARETO
POR NIVEL EDUCACIONAL
TOTAL NACIONAL (Jefes de Hogar)

Nivel Ocupacional		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t(α, g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Ninguna		6.9715	0.9665	1.8904	0.2876	0.3850	0.9467	1.1428	N.D.	2.57
Primaria urbana		6.2677	0.7068	1.5553	0.1974	0.3524	0.9480	0.9249	*	2.36
Primaria rural		6.6457	0.5608	1.7551	0.1566	0.2796	0.9732	1.2779	—	2.36
Total primaria 1/ Bachillerato básico	N.C.	6.3556	0.6355	1.6050	0.1775	0.3168	0.9598	0.8906	*	2.36
Bachillerato clásico	N.C.	5.1866	0.5820	1.1410	0.1625	0.2902	0.9357	0.8071	*	2.36
Bachillerato clásico	N.C.	4.5456	0.6498	0.8911	0.1814	0.3239	0.8804	0.8396	*	2.36
Otra secundaria	N.C.	4.4687	0.9176	0.8818	0.2731	0.3655	0.8221	0.7765	*	2.57
Secundaria técnica o vocacional	N.C.	4.1180	0.5539	0.7597	0.1595	0.2486	0.8891	0.9232	*	2.45
Normal	N.C.	4.7695	0.5644	0.9835	0.1576	0.2814	0.9207	0.9659	N.D.	2.36
Total secundaria 2/ Superior universitaria	N.C.	4.8455	0.6122	1.0081	0.1710	0.3052	0.9124	0.8288	*	2.36
Otras	N.C.	3.5185	0.5268	0.5180	0.1471	0.2626	0.7997	0.7839	*	2.36
		3.7898	0.4554	0.6448	0.1311	0.2044	0.8951	0.6969	*	2.45

1/ Incluye: Primaria urbana y rural.— 2/ Incluye: Bachillerato básico, clásico y otra secundaria.

TABLA 12
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESOS DE PARETO
POR NIVEL EDUCACIONAL
Area Urbana (Jefes de Hogar)

Nivel Ocupacional		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t (α, g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Ninguna		6.2698	0.8448	1.6162	0.2514	0.3365	0.9445	1.1183	N.D.	2.57
Primaria urbana		6.2760	0.7630	1.5452	0.2131	0.3804	0.9394	0.9335	N.D.	2.36
Primaria rural		5.6729	0.7977	1.3767	0.2374	0.3177	0.9330	0.9296	*	2.57
Total primaria 1/ Bachillerato básico		6.3219	0.7528	1.5638	0.2102	0.3753	0.9422	0.8896	*	2.36
Bachillerato básico		5.1281	0.5776	1.1179	0.1613	0.2880	0.9342	0.7740	*	2.36
Bachillerato clásico		4.5399	0.6595	0.8873	1.1842	0.3288	0.8765	0.8407	*	2.36
Otra secundaria		4.4597	0.8915	0.8798	0.2653	0.3551	0.8292	0.7785	*	2.57
Secundaria técnica o vocacional		4.0807	0.5483	0.7456	0.1579	0.2461	0.8876	0.9246	*	2.45
Normal		4.6995	0.5725	0.9555	0.1599	0.2854	0.9144	0.9500	N.D.	2.36
Total secundaria 2/ Superior universitaria		4.8040	0.6063	0.9916	0.1693	0.3023	0.9113	0.7957	*	2.36
Otras		3.5432	0.5442	0.5258	0.1520	0.2713	0.7942	0.8075	*	2.36
		3.7276	0.4297	0.6233	0.1237	0.1929	0.8994	0.7315	*	2.45

1/ Incluye: Primaria urbana y rural.— 2/ Incluye: Bachillerato básico, clásico, y otra secundaria.

TABLA 13
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADO DE LA DISTRIBUCION DE PARETO
DE INGRESO POR NIVEL EDUCACIONAL
AREA RURAL (Jefes de Hogar)

Nivel Ocupacional		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t(α, g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Ninguna		7.1835	0.8427	1.9883	0.2508	0.3357	0.9624	1.1721	N.D.	2.57
Primaria urbana		6.2670	0.4536	1.6161	0.1266	0.2261	0.9791	1.0996	N.D.	2.36
Primaria rural		6.5914	0.5112	1.7632	0.1428	0.2549	0.9778	1.5356	—	2.36
Total primaria 1/		6.3893	0.4372	1.6791	0.1221	0.2179	0.9820	1.2829	—	2.36
Bachillerato básico	N.C	5.3887	0.6625	1.2831	0.1908	0.2973	0.9396	1.2554	—	2.45
Bachillerato clásico	N.C	4.3385	0.4324	0.8694	0.1245	0.1941	0.9436	1.1275	N.D.	2.45
Otra secundaria	N.C	2.0000	0.00002	0.000015	0.000008	0.000008	0.0039	0.4074	*	3.18
Secundaria técnica o vocacional	N.C	2.9932	0.3885	0.4040	0.1296	0.1003	0.9113	2.6305	—	4.30
Normal		3.9631	1.3211	0.7474	0.4408	0.3411	0.7678	2.0415	—	4.30
Total secundaria 2/	N.C	4.8792	0.4927	1.0802	0.1419	0.2211	0.9519	1.2080	N.D.	2.45
Superior universitaria	N.C	3.2489	0.3719	0.4329	0.1038	0.1854	0.8447	0.6817	*	2.36
Otras		3.2785	0.5953	0.4788	0.1830	0.2121	0.7941	1.2379	—	2.78

1/ Incluye Primaria urbana y rural.— 2/ Incluye: Bachillerato básico, clásico y otra secundaria.

TABLA 14
COLOMBIA
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESO DE PARETO
POR POSICION OCUPACIONAL
Total Nacional y por áreas

Posición Ocupacional		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t(α, g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
TOTAL NACIONAL										
Cuenta propia		6.2888	0.2275	1.6703	0.0633	0.1237	0.9915	1.6564	—	2.18
Empleador		4.8653	0.2417	1.0722	0.0673	0.1314	0.9772	0.7738	*	2.18
Obreros		7.5850	0.6370	2.1965	0.1840	0.2924	0.9666	1.1155	N.D.	2.23
Empleados		5.8184	0.3428	1.3996	0.0954	0.1864	0.9732	0.8972	*	2.18
TOTAL URBANO										
Cuenta propia		6.1866	0.3044	1.5896	0.0847	0.1655	0.9834	1.0337	N.D.	2.18
Empleador	N.C	4.6023	0.3120	0.9351	0.0868	0.1696	0.9519	0.5534	*	2.18
Obreros		6.6362	0.4886	1.8185	0.1360	0.2656	0.9680	0.9099	*	2.18
Empleados		5.8362	0.3631	1.3984	0.1010	0.1974	0.9700	0.8666	*	2.18
TOTAL RURAL										
Cuenta propia		7.5338	0.4068	2.1923	0.1197	0.1711	0.9868	1.7650	—	2.26
Empleador		5.6761	0.2067	1.4359	0.0578	0.1129	0.9903	1.6635	—	2.18
Obreros		6.2804	0.7293	1.8599	0.2067	0.3658	0.9383	0.6131	*	2.20
Empleados		5.9853	0.2626	1.5328	0.0731	0.1428	0.9866	1.4725	—	2.18

TABLA 15
ECUADOR
PAROMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESOS DE PARETO
POR CATEGORIA DE OCUPACION

		Area Urbana (P.E.A.)								
Categoría de Ocupación		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t(α ,g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Total		5.0243	0.3125	1.1860	0.0955	0.1809	0.9691	0.4645	*	2.23
Hombres		4.9419	0.3464	1.1389	0.1058	0.2006	0.9594	0.4434	*	2.23
Mujeres		5.5160	0.3084	1.4277	0.0942	0.1786	0.9789	0.7870	*	2.23
Empleado o asalariado		5.2242	0.3314	1.2625	0.1012	0.1918	0.9693	0.4528	*	2.23
Patronos	N.C	3.8500	0.2826	0.7011	0.0863	0.1636	0.9318	0.4276	*	2.23
Cuenta propia		5.3725	0.3854	1.3203	0.1177	0.2231	0.9624	0.4849	*	2.23

TABLA 16
ECUADOR
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESOS DE PARETO
POR RAMA DE ACTIVIDAD ECONOMICA
Area Urbana (P.E.A.)

Actividad Económica		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t(α ,g)
		a	Error	b	Error					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Total		4.9631	0.2929	1.1644	0.0895	0.1696	0.9717	0.4776	*	2.23
Agricultura, silvicultura, caza y pesca	N.C	4.5346	0.1554	1,0239	0.0475	0.0900	0.9894	0.7555	*	2.23
Explotación minas y canteras	N.C.	3.8073	0.5235	0.7018	0.1773	0.2036	0.8508	0.9650	N.D.	2.45
Industria manufacturera		5.4039	0.2947	1.3513	0.0900	0.1706	0.9785	0.7795	*	2.23
Construcción		5.3411	0.4227	1.2928	0.1291	0.2447	0.9536	0.8902	*	2.23
Electricidad, gas, agua y servicios sanitarios	N.C	3.8373	0.6047	0.7208	0.2116	0.1984	0.8362	1.1683	N.D.	2.57
Comercio		4.8630	0.3518	1.1103	0.1075	0.2037	0.9562	0.4457	*	2.23
Transporte, almacenamiento comunicaciones		5.4703	0.4696	1.3244	0.1434	0.2718	0.9460	0.4384	*	2.23
Servicios		4.8231	0.2686	1.1191	0.0821	0.1555	0.9741	0.4932	*	2.23
Actividades no bien especificadas	N.C	3.3643	0.1313	0.5867	0.0401	0.0760	0.9773	0.8158	*	2.23

TABLA 17
ECUADOR
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESOS DE PARETO
POR GRUPO PRINCIPAL DE OCUPACION
Area Urbana (P.E.A.)

Grupos de Ocupación		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t ($\alpha.g.$)
		a	Error	b	Error					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ambos sexos		4.9631	0.2929	1.1644	0.0895	0.1696	0.9717	0.4776	*	2.23
Prof. técnicos y afines	N.C.	4.4916	0.4733	0.9313	0.1446	0.2740	0.8976	0.3905	*	2.23
Gerente administ. y afines	N.C.	3.2894	0.3723	0.4722	0.1137	0.2155	0.7955	0.4747	*	2.23
Oficinistas y afines		4.9106	0.3932	1.1095	0.1201	0.2276	0.9461	0.4066	*	2.23
Vendedores y similares		4.8891	0.2879	1.1336	0.0880	0.1667	0.9711	0.4546	*	2.23
Agricultores, pescadores, madereros y afines	N.C.	4.5780	0.1593	1.0422	0.0487	0.0923	0.9892	0.8215	*	2.23
Mineros, canteros y afines	N.C.	3.3715	0.6058	0.5533	0.2197	0.1570	0.7835	1.9090	—	2.78
Conductores de transporte y afines		5.4709	1.0231	1.3273	0.3367	0.4506	0.8304	0.7485	*	2.36
Artesanos y operarios		6.6041	0.4781	1.8009	0.1461	0.2768	0.9686	0.6670	*	2.23
Obreros, jornaleros, neoc.		5.9589	0.4336	1.5424	0.1325	0.2510	0.9650	0.6481	*	2.23
Trab. de servicios y afines		5.2857	0.2446	1.3821	0.0747	0.1416	0.9857	0.9224	*	2.23
Otros trabajadores neoc.	N.C.	3.6037	0.2203	0.6172	0.0673	0.1275	0.9450	0.6858	*	2.23

TABLA 18
ECUADOR
PARAMETROS ESTIMADOS DE LA DISTRIBUCION DE INGRESO DE PARETO
POR NIVEL EDUCACIONAL
Area Urbana (P.E.A.)

Nivel Educativo		Coeficiente α		Coeficiente β		Error Estándar	Coeficiente de Correlación	Coeficiente Durbin-Watson		t ($\alpha.g.$)
		a	Error	b	Error					
1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12
Total		4.9649	0.2926	1.1649	0.0894	0.1694	0.9717	0.4787	*	2.23
Hombres		4.9166	0.3342	1.1306	0.1021	0.1935	0.9615	0.4496	*	2.23
Mujeres		5.2610	0.2702	1.3336	0.0826	0.1565	0.9813	0.8258	*	2.23
Sin estudio		6.6357	0.4250	1.8898	0.1329	0.2278	0.9785	1.7768	—	2.26
Primaria de 1 a 3		5.5730	0.3563	1.4615	0.1089	0.2063	0.9733	0.9107	*	2.23
Primaria de 4 a 6		6.0151	0.4069	1.5699	0.1243	0.2356	0.9700	0.4859	*	2.23
Secundaria de 1 a 3		5.5877	0.4351	1.3827	0.1329	0.2159	0.9567	0.4305	*	2.23
Secundaria de 4 a 6	N.C.	4.5655	0.3842	0.9703	0.1174	0.2224	0.9339	0.3913	*	2.23
Superior de 1 a 3	N.C.	4.4109	0.6980	0.8853	0.2132	0.4041	0.7956	0.5595	*	2.23
Superior de 4 a 6	N.C.	3.1903	0.3001	0.4348	0.0917	0.1737	0.8319	0.3538	*	2.23

CAPITULO III

LA DISTRIBUCION DE LORENZ

1- Descripción

Esta es una relación funcional que expresa el porcentaje acumulado de perceptores de ingreso como una función del porcentaje acumulado de ingreso. [10].

Si:

Z = Fracción (porcentaje) acumulativa de ingreso.

$$(0 \leq Z \leq 1)$$

W = Fracción (porcentaje) acumulativa de población

$$(0 \leq W \leq 1)$$

La función de Lorenz es tal que:

$$Z = f(W) \quad (17)$$

La expresión explícita de esta función puede encontrarse haciendo uso de las propiedades de la función de Pareto ya analizadas. Si en las ecuaciones (15 y (16) se hace que:

$$K = \frac{Y_x}{Y_o}$$

Se obtiene:

$$Z = 1 - K^{1-b} \quad (18)$$

$$W = 1 - K^{-b} \quad (19)$$

$$\text{De donde: } K = (1 - Z)^{1/(1-b)} \quad (20)$$

$$K = (1 - W)^{-1/b} \quad (21)$$

$$\text{y por lo tanto: } (1 - Z)^{1/(1-b)} = (1 - W)^{-1/b} \quad (22)$$

con lo cual la curva de Lorenz que relaciona a Z con W es:

$$Z = 1 - (1 - W)^{1-1/b} \quad (23)$$

donde b es la estimación del coeficiente β de Pareto ya discutido. [5].

2. PROPIEDADES DE LA FUNCION DE LORENZ

Aprovechando la expresión analítica de la ecuación (23) pueden obtenerse dos propiedades muy importantes de la función de Lorenz.

a) Ingreso Promedio para un Intervalo en la Distribución

La función de Pareto permite obtener una estimación del ingreso medio de la comunidad expresado por la ecuación (14). Este promedio corresponde (por la relación doble logarítmica) a un promedio de tipo geométrico que mide el promedio de ingreso para todo el universo en estudio. La función de Lorenz permite obtener el promedio de ingreso que corresponde a cualquier intervalo (proporción de personas) en la distribución expresado como una proporción del ingreso promedio total de la forma siguiente.

$$\bar{Y}_i = \frac{\Delta Z_i}{\Delta W_i} \bar{Y} \quad (24)$$

donde: $\Delta Z_i = [1 - (1 - W_{is})^{1-1/b}] - [1 - (1 - W_{ij})^{1-1/b}]$

$\Delta W_i = W_{is} - W_{ij}$;

$\bar{Y}$ = Ingreso promedio de la comunidad

W_{is} y W_{ij} = Límites superior e inferior de la fracción acumulativa de personas para el intervalo i.

El intervalo i considerado puede ser cualquier porcentaje entre 0o/o y 100o/o. Los intervalos más usados corresponden a los percentiles de la distribución.

b) Nivel de Ingreso que Corresponde a un Punto.

Otra propiedad muy importante de la curva de Lorenz es que permite determinar cualquier nivel de ingreso Y_X correspondiente a un punto cualquiera (W_X) en la función. [5]. La relación:

$$Y_X = (1 - 1/b) (1 - W_X)^{-1/b} \bar{Y} \quad (25)$$

expresa dicho nivel de ingreso como directamente proporcional al ingreso promedio $\bar{Y}$ siendo $(1 - 1/b) (1 - W_X)^{-1/b}$ la razón de proporcionalidad.

3. RESULTADOS PRACTICOS - APLICACIONES AL CASO COLOMBIANO.

3.1 Estimación de Distribuciones de Ingresos

Partiendo del coeficiente b obtenido mediante la función de Pareto puede determinarse directamente la función (23):

$$Z = 1 - (1 - W)^{1 - 1/b}$$

donde:

Z = Fracción acumulativa de ingreso

W = Fracción acumulativa de población

b = Coeficiente de Pareto.

Por ejemplo si se desea conocer los porcentajes de ingreso (Z_1 y Z_2) que reciben el 20o/o (W_1) y el 80o/o (W_2) de la población, haciendo uso del coeficiente b estimado para Colombia, se tendría:

$$Z_1 = 1 - (1 - .20)^{1 - (1/1,4593)} = 6.78\text{o/o}$$

$$Z_2 = 1 - (1 - .80)^{1 - (1/1,4593)} = 39.74\text{o/o}$$

De esta manera pueden deducirse distribuciones teóricas de niveles de ingresos recibidos por diferentes grupos (o porcentajes) de la población. Con estos resultados inclusive pueden elaborarse gráficos de Lorenz y computarse cualquier otro tipo de funciones y coeficientes analíticos de ingresos.

Se ha elaborado para Colombia una distribución teórica de ingresos (Tabla 19) la cual está representada en el gráfico 4. En el mismo gráfico se ha dibujado la curva de Lorenz resultante de la distribución observada en la muestra. Más adelante se explica con detalle esta comparación (punto 3.4).

3.2 Ingreso Promedio para un Intervalo de Ingreso Cualquiera en la Distribución.

Puede aprovecharse los ajustes de la curva de Lorenz para determinar el ingreso promedio que corresponde a cualquier intervalo de ingreso. Aplicando la función (24):

$$\bar{Y}_i = \frac{\Delta Z_i}{\Delta W_i} \bar{Y}$$

donde:

$$\Delta Z_i = 1 - (1 - W_{is})^{1-1/b} - 1 - (1 - W_{ii})^{1-1/b}$$

$$\Delta W_i = W_{is} - W_{ii}$$

$$\bar{Y} = \text{Ingreso promedio de la comunidad.}$$

W_{is} y W_{ii} = Límites superior (s) e inferior (i) de la fracción acumulativa de familias para el intervalo i

Si por ejemplo queremos el ingreso promedio que corresponde al 9o. decil (W_9), para la distribución del ingreso del total nacional de Colombia, se tiene:

$$\bar{Y}_9 = \frac{[1 - (1 - 0.9)^{1-1/b}] - [1 - (1 - 0.8)^{1-1/b}]}{0.9 - 0.8} \bar{Y}$$

y como $b = 1,4593$, se tiene:

$$\bar{Y}_9 = 0,871 \bar{Y}$$

Esto significa que las familias pertenecientes al noveno decil de la distribución reciben un ingreso promedio equivalente al 87.10o/o del ingreso promedio de la comunidad. Si asumimos que el ingreso promedio de la comunidad es el obtenido según la ecuación (14) (\$794.31), entonces el ingreso promedio del 9o. decil será:

$$Y_9 = 0,871 (\$ 794.31) = \$ 691.84$$

Igual cálculo podría hacerse para cualquier otro punto.

3.3 Ingreso por Unidad Perceptora que Corresponde a un Punto Dado.

Es deseable poder determinar el nivel de ingreso que corresponde a cualquier punto en la curva de Lorenz. Si evaluamos la función de Lorenz en un punto W_x cualquiera, el nivel de ingreso Y_x que le corresponde está dado por la expresión (25):

$$Y_x = (1 - 1/b) (1 - W_x)^{-1/b} \bar{Y}$$

Por ejemplo, si $b = 1,4593$, el nivel de ingreso que corresponde al percentil .25 será:

$$Y_{.25} = (0.314740) (1 - .25)^{-0.685260} \bar{Y}$$

$$Y_{.25} = 0.383315 \bar{Y}$$

O sea el nivel de ingreso es igual al 38o/o del ingreso promedio de la comunidad. En términos de ingresos promedios, si $\bar{Y} = \$794.31$ el nivel de ingreso del percentil .25 (primera cuarta parte) es \$304.46 (*).

La posibilidad de identificar el nivel de ingreso que corresponde a un punto cualquiera de la curva de Lorenz puede ser usada para comparar las distribuciones de ingreso para diferentes clasificaciones del mismo.

4. APLICACIONES PARA EL CASO DEL ECUADOR.

a) La función de Lorenz para el área urbana del Ecuador viene dada por:

$$Z = 1 - (1 - W)^{0.1416}$$

Por ejemplo, los porcentajes acumulativos de ingreso que corresponden a los porcentajes acumulativos de personas del 20o/o y 80o/o son respectivamente:

$$Z = 1 - (1 - .20)^{0.1416} = 3,11\text{o/o}$$

$$Z = 1 - (1 - .80)^{0.1416} = 20.38\text{o/o}$$

(*) Estos resultados pueden darse por intervalos suponiendo constantes a Y_x y W_x y a "b" como variable aleatoria.

b) El ingreso promedio para un intervalo en la distribución que corresponde, por ejemplo al 9o. decil es:

$$\bar{Y}_{.9} = \frac{[1 - (1 - .9)^{0.1416}] - [1 - (1 - .8)^{0.1416}]}{.9 - .8} \bar{Y}$$

$$\bar{Y}_{.9} = .7440 \bar{Y}$$

luego las personas que pertenecen al noveno decil de la distribución tienen un promedio de ingreso equivalente al 74.40o/o del ingreso promedio del área urbana del país.

c) El ingreso por percentil que corresponde a un punto dado Y_X en un punto cualquiera W_X , por ejemplo 0.25, será:

$$Y_{.25} = 0.1416 (1 - .25) - 0.8584 \bar{Y}$$

$$Y_{.25} = 0.1813 \bar{Y}$$

Conocido Y puede cuantificarse $Y_{.25}$, en la misma forma como se procedió en el ejemplo para Colombia.

5. GRAFICO DE LORENZ

Mediante la relación funcional (23) se puede construir la conocida curva de Lorenz, representada en el gráfico 3. Este tipo de representación gráfica es muy útil por cuanto permite visualizar el grado de igualdad existente en una distribución de ingresos. La igualdad completa se representa a través del eje de 45° ya que cualquier punto localizado sobre él corresponde a porcentajes iguales de percentiles y de ingresos ($Z = W$). Entre más se aleje la curva de Lorenz de esta línea de equidistribución tanto mayor será el grado de desigualdad en la distribución del ingreso.

5.1 Resultados Prácticos.

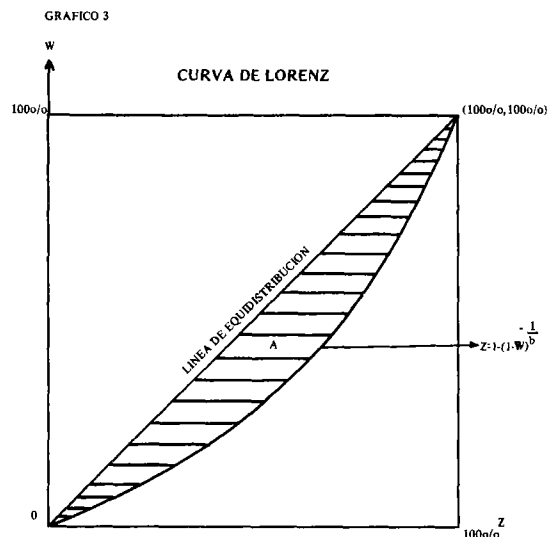
Aprovechando los ajustes de la distribución de Pareto presentados en las tablas de resultados se pueden calcular y representar gráficamente con facilidad para Colombia y Ecuador las curvas de Lorenz. Conociendo el estimador b de β , bastará con dar valores a W para determinar los correspondientes valores de Z . Así por ejemplo en la distribución de Pareto que corresponde al total nacional colombiano el estimativo de β es tal que $b = 1.4593$, con el cual la función de Lorenz quedaría:

$$Z = 1 - (1 - W)^{1 - 1/1.4593} \quad (26)$$

Si se quiere calcular el porcentaje del ingreso total que recibe el 80o/o del pueblo colombiano se tendría:

$$Z = 1 - (1 - .80)^{1 - 1/1.4593} = 39,74\%$$

En el gráfico 4 se representan las distribuciones obtenidas a través de la muestra (datos observados, tabla 1),

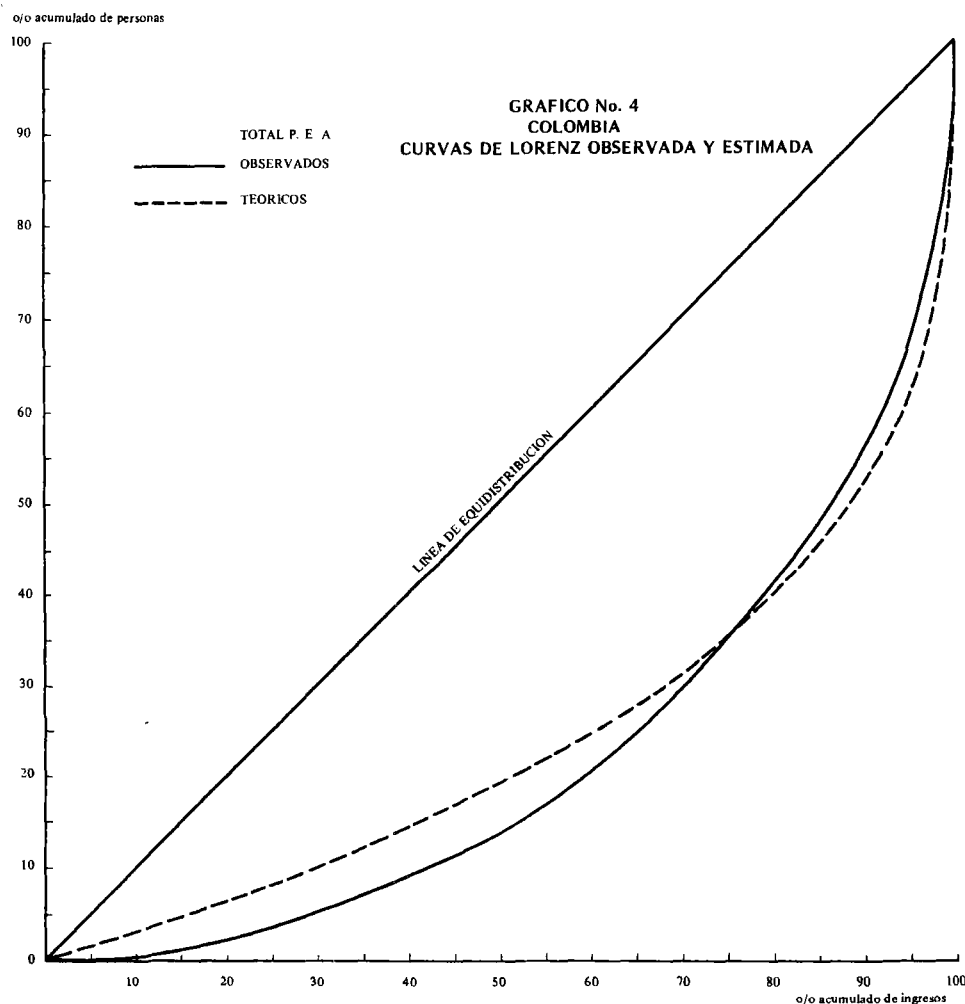


y estimada mediante la ecuación (23) (datos teóricos, Tabla 19). Se observa que en la primera parte la función teórica está por encima de la observada; a medida que se avanza hacia la derecha las curvas se aproximan para cortarse y posteriormente situarse la función observada por encima de la teórica. Cuando el valor de b es muy próximo a uno (absoluta desigualdad en el ingreso) las curvas se cortan en la vecindad del origen, mientras que cuando mayor es b (mayor igualdad en la distribución) las curvas tienden a cortarse en el punto $(100o/o, 100o/o)$. Se ha observado que el valor de b suele estar alrededor de 1.50 por lo cual las curvas se cortan en la parte intermedia mientras que difieren en los valores extremos. Esto se debe a que la función de Lorenz depende directamente del coeficiente b de la función de Pareto la cual se ha comprobado, no se ajusta bien a valores extremos de los ingresos [12]

TABLA No. 19
TOTAL NACIONAL-COLOMBIA
DISTRIBUCION OBSERVADA Y TEORICA DE INGRESOS

TEORICA										
W	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Z	3.92	6.98	10.60	14.90	19.60	25.00	31.50	39.79	51.50	100.00
OBSERVADA										
W	40.00	72.0	84.30	90.10	93.10	94.50	96.30	98.50	99.70	100.0
Z	9.40	32.0	46.50	56.10	62.50	66.20	72.30	82.80	93.60	100.0
W= POBLACION						Z= INGRESOS				

CURVAS DE LORENZ OBSERVADA Y ESTIMADA



La curva de Lorenz es de gran utilidad cuando se quiere comparar varias distribuciones en un mismo gráfico: aquella distribución cuya curva se acerque más a la línea de 45°, será la que presenta mayor igualdad, y por el contrario, aquella que más se aleje representará la mayor concentración de ingresos en pocos perceptores. El gráfico no es tan explícito cuando las curvas consideradas se cortan, pues en esas circunstancias no es posible efectuar comparaciones más detalladas y con más precisión. Igualmente, se obtienen mejores resultados cuando se cuenta con información suficiente sobre todo para los niveles extremos de las distribuciones, las cuales por presentar generalmente más dificultades de ser observadas deben ser investigadas más cuidadosamente.

CAPITULO IV

Función de Gini

1. DESCRIPCION

La función de Pareto relaciona el logaritmo del porcentaje acumulado de perceptores de ingreso con el logaritmo de los niveles de ingreso. La función de Lorenz presenta la relación, en escala aritmética, entre el porcentaje acumulado de perceptores de ingreso y el porcentaje acumulado de ingreso total. Corrado Gini propuso [11] una relación doble logarítmica de la forma:

$$\log N = \pi + \delta \log Y_X \quad (27)$$

donde N es el número de perceptores de ingreso con un ingreso mayor o igual a un nivel X y Y_X es el agregado de ingreso hasta el mismo nivel X. π y δ son parámetros a estimar, generalmente usando el método de los mínimos cuadrados. La estimación más importante es la del parámetro δ pues cuanto menor sea su valor (menor pendiente de la función) mayor será el grado de igualdad en la distribución.

2. GRAFICO DE GINI

Para lograr una representación gráfica de la función de Gini se prefiere trabajar en el eje horizontal con el logaritmo del porcentaje acumulado de ingreso agregado, y en el eje vertical con el logaritmo del porcentaje acumulado de perceptores de ingreso. Este tipo de representación difiere del propuesto por Gini porque en lugar de valores absolutos se toma porcentajes, no obstante esta modificación no desvirtua en nada los resultados y más bien hace más práctico y fácil el análisis [12]. Para comodidad en la interpretación del gráfico la lectura del eje horizontal se hace de derecha a izquierda.

3. RESULTADOS PRACTICOS

En base a los datos disponibles se han calculado funciones de Gini que corresponden a todos los ajustes Paretianos presentados en las tablas de resultados, tanto para Colombia como para el Ecuador, para algunas variables de importancia.

En la figura 5 se presenta el gráfico de Gini que corresponde a Colombia, total nacional y por áreas urbana y rural. La línea de equidistribución corresponde al eje de 45°; tiene este nombre por cuanto todo punto localizado sobre ella corresponde a un mismo valor en su ordenada (logaritmo del porcentaje acumulado de ingreso total) y en su abscisa (logaritmo del porcentaje acumulado de perceptores de ingreso). En la parte inferior del gráfico se han dibujado las funciones que corresponden a los tres totales. Las distribuciones utilizadas para los gráficos están contenidas en las tablas 20, 21 y 22 columnas 6 y 7.

Para interpretar el gráfico se ha de observar cual es el grado de aproximación de las curvas a la línea de equidistribución. Cuanto mayor sea esta aproximación mayor será el grado de igualdad en la distribución del ingreso. El gráfico 5 muestra que la distribución del ingreso en el área rural de Colombia es más igualitaria que en el área urbana. Esta representación puede ser utilizada para determinar cualquier porcentaje de ingreso o de personas. Así por ejemplo, se puede ver que el 30% del ingreso total del área rural está en manos de un 70% de personas. En el mismo gráfico se han consignado los resultados del ajuste de la función para los grupos considerados. Se observa que las tres funciones tienen coeficientes δ (desviación estándar) muy semejantes siendo ligeramente menor para el total nacional, aunque su curva es la que más se aleja de la línea de equidistribución. No sucede lo mismo con la curva del área rural cuya función tiene una desviación estándar bastante baja (apenas 0.01 más que la nacional) y es la que más se acerca a la línea de equidistribución.

El gráfico de Gini se suele complementar representando también el inverso de la función. Estas curvas se localizan en la parte superior del gráfico. Para esta representación (gráfico 5) se ha utilizado la información de las tablas 20, 21 y 22 columnas 8 y 9 referentes a los porcentajes acumulados de personas y de ingreso total (porcentajes de bajos a altos ingresos). La interpretación del gráfico en este caso es la misma pues la

distribución más igualitaria corresponderá a aquella cuya línea este más proxima a la línea de equidistribución. [12]

En el gráfico 6 se comparan las distribuciones de ingreso que corresponde a las 5 regiones consideradas en la encuesta de hogares de Colombia. Se ve aquí como la distribución de ingreso es más igualitaria en Bogotá, en tanto que las mayores desigualdades corresponden a la región Oriental y a la Pacífica.

Para el Ecuador, área urbana por sexos, los resultados de las curvas de Gini son presentados en el gráfico 7 el cual nos muestra que la mejor distribución del ingreso corresponde a los hombres. La base para estas representaciones es la tabla 23.

4. INDICE DE CONCENTRACION DE GINI

A través de los gráficos de Pareto y de Gini se puede obtener una idea cualitativa del grado de igualdad de la distribución. Sin embargo, Gini ha ideado una medida cuantitativa del grado de concentración del ingreso con aplicabilidad a la curva de Lorenz. El índice relaciona el área comprendida entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz con el área del triángulo formado por la línea de equidistribución y las coordenadas (*). Tomando como referencia el gráfico 7 el índice de Gini viene dado por:

$$G = \frac{A}{0.5} \quad (28)$$

siendo A el área sombreada en dicho gráfico.

Aprovechando los resultados de la función de Pareto y como una propiedad importante de esta, se puede obtener un estimativo simple del índice de concentración de Gini, a través de la relación [4]

$$G = \frac{1}{2b-1} \quad (29)$$

Para interpretar el índice obsérvese que si la curva de Lorenz se superpone a la línea de equidistribución, hay perfecta igualdad en la distribución. En este caso el área A del gráfico 3 se reduce a cero y por ende el valor de G en la ecuación (28) es cero. Para que esto suceda el valor de b debe tender a infinito. Por otro lado cuanto más se aparte la curva de Lorenz de la línea de equidistribución mayor será el grado de desigualdad. La desigualdad es máxima cuando el área A del gráfico 3 es igual a 1/2 y en este caso el valor de G en la ecuación (28) es uno. Además para que esto suceda el valor de b debe tender a la unidad; en caso de ser exactamente uno se presentaría una indeterminación. De lo anterior se deduce que el índice de concentración de Gini varía entre cero y uno. Cuando es cero hay perfecta igualdad en la distribución del ingreso y cuando es uno la desigualdad es absoluta. Estas conclusiones refutan la afirmación de Pareto según la cual cuanto menor sea b mayor será la igualdad de la distribución.

Una buena aproximación por segmentos de recta a la curva de Lorenz para obtener el índice de concentración de Gini se logra con la expresión: [17]

$$G = 1 - (2) \left[\sum_{i=1}^n (W_i - W_{i-1}) (Z_i - 1) + \frac{1}{2} (W_i - W_{i-1}) (Z_i - Z_{i-1}) \right] \quad (30)$$

Cuando el índice obtenido con la ecuación (29) difiere mucho del obtenido en (30) puede intuirse que el ajuste de la función de Pareto es muy deficiente, siendo necesario aplicar el método de los cuartiles para determinar el ingreso mínimo, que puede ser la causa de la discrepancia.

* La referencia [17] presenta una detallada y práctica descripción del coeficiente y la forma de estimarlo a través de aproximaciones acumulativas

4.1 RESULTADOS PRACTICOS

Para la distribución del ingreso que corresponde al total colombiano el índice de Gini es:

$$G = \frac{1}{2(1,4593) - 1} = 0.5212$$

valor muy cercano al obtenido haciendo uso de la ecuación (30) que arroja un índice de 0.535.

Se puede construir un intervalo de confianza para el coeficiente de la ecuación (29) tomando en cuenta que la única variable aleatoria que en ella aparece es el coeficiente b. Así se tiene que la estimación para G con un nivel de significación del 5o/o es:

$$0.4492 \leq G \leq 0.6211$$

El límite inferior se obtiene reemplazando en (29) a b por 1.6132 (límite superior en la estimación por intervalo de b), y el superior reemplazando a b por 1,3050 (límite inferior del mismo intervalo).

TABLA 20
COLOMBIA
DISTRIBUCION DE INGRESO DE LA P.E.A.
TOTAL NACIONAL

Códi- go	Ingreso (Media de Intervalo)	Personas	Ingreso Total	o/o de personas	o/o de ingreso	o/o acumulado de personas↓	o/o acumulado de ingreso ↓	o/o acumulado de personas↑	o/o acumu- lado de ingr.↑
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	250	5.994	1.498.500	40.0	9.4	100.00	100.0	40.0	9.4
2	750	4.790	3.592.500	32.0	22.6	60.0	90.6	72.0	32.0
3	1.250	1.846	2.307.500	12.3	14.5	28.0	68.0	84.3	46.5
4	1.750	870	1.522.500	5.8	9.6	15.7	53.5	90.1	56.1
5	2.250	447	1.005.750	3.0	6.4	9.9	43.9	93.1	62.5
6	2.750	216	594.000	1.4	3.7	6.9	37.5	94.5	66.2
7	3.500	278	973.000	1.8	6.1	5.5	33.8	96.3	72.3
8	4.500	159	715.500	1.1	4.5	3.7	27.7	97.4	76.8
9	5.500	105	577.500	0.7	3.6	2.6	23.2	98.1	80.4
10	6.500	59	383.500	0.4	2.4	1.9	19.6	98.5	82.8
11	8.500	99	841.500	0.7	5.3	1.5	17.2	99.2	88.1
12	12.500	70	875.000	0.5	5.5	0.8	11.9	99.7	93.6
13	17.500	19	332.500	0.1	2.1	0.3	6.4	99.8	95.7
14	22.500	30	675.000	0.2	4.3	0.2	4.3	100.0	100.0
Total		14.982	15.894.250						

TABLA 21
COLOMBIA
DISTRIBUCION DEL INGRESO DE LA P.E.A.
Area Urbana

Ingreso	Personas	Ingreso Total	o/o de personas	o/o de ingresos	o/o acumulado de personas ↓	o/o acumulado de ingresos ↓	o/o acumulado de personas ↑	o/o acumulado de ingresos ↑
1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	2.564	641.000	27.77	5.12	100.00	100.00	27.77	5.12
750	3.078	2.308.500	33.34	18.44	72.23	94.88	61.11	23.56
1.250	1.485	1.856.250	16.08	14.82	38.89	76.44	77.19	38.38
1.750	755	1.321.250	8.18	10.55	22.81	61.62	85.37	48.93
2.250	396	891.000	4.29	7.12	14.63	51.07	89.66	56.05
2.750	200	550.000	2.17	4.39	10.34	43.95	91.83	60.44
3.500	258	903.000	2.79	7.21	8.17	39.56	94.62	67.65
4.500	149	670.500	1.61	5.35	5.38	32.35	96.23	73.00
5.500	93	511.500	1.01	4.08	3.77	27.00	97.24	77.08
6.500	53	344.500	0.57	2.75	2.76	22.92	97.81	79.83
8.500	90	765.000	0.97	6.11	2.19	20.17	98.78	85.94
12.500	67	837.500	0.73	6.69	1.22	14.06	99.51	92.63
17.500	18	315.000	0.20	2.52	0.49	7.37	99.71	95.15
22.500	27	607.500	0.29	4.85	0.29	4.85	100.00	100.00
Total	9.233	12.522.500	100.00	100.00				

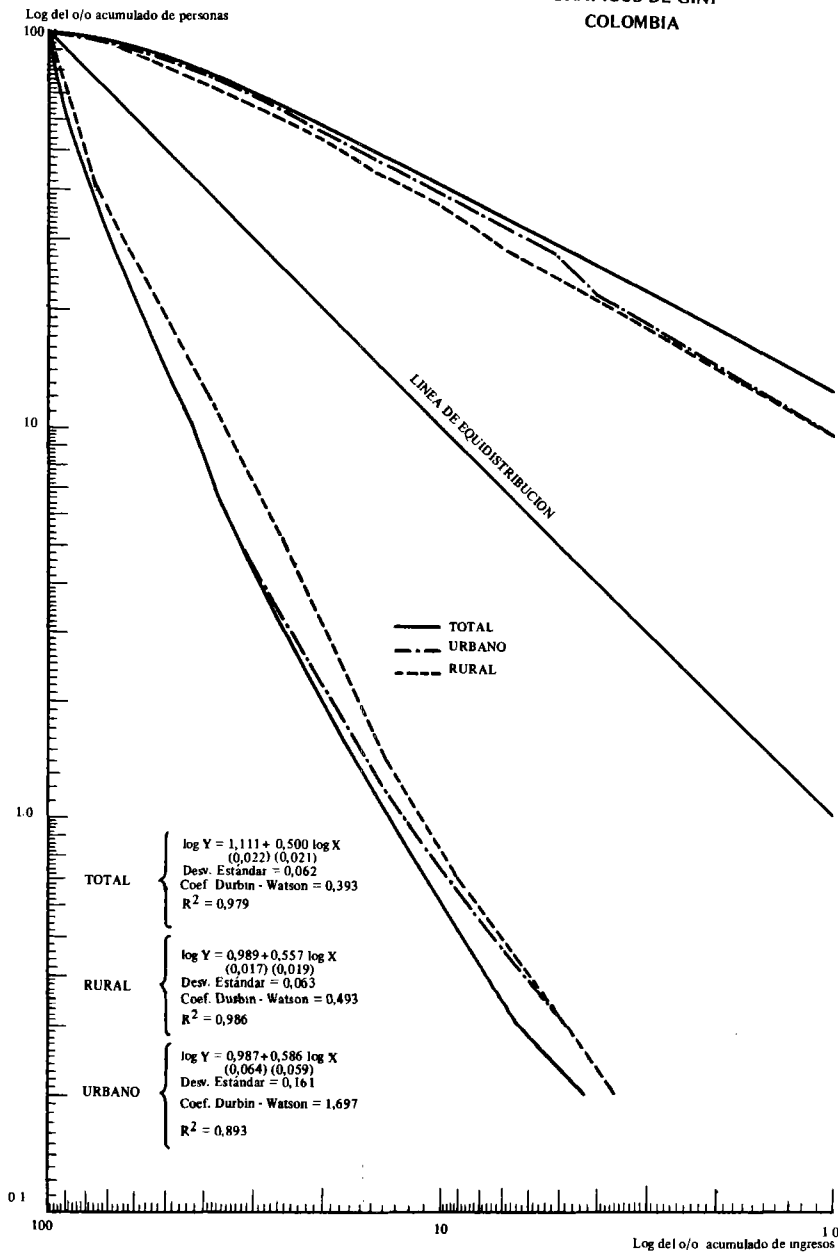
TABLA 22
COLOMBIA
DISTRIBUCION DEL INGRESO DE LA P.E.A.
Area Rural

Ingreso	Personas	Ingreso Total	o/o de personas	o/o de ingresos	o/o acumulado de personas ↓	o/o acumulado de ingresos ↓	o/o acumulado de personas ↑	o/o acumulado de ingresos ↑
1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	3.430	857.500	59.66	25.43	100.00	100.00	59.66	25.43
750	1.712	1.284.000	29.78	38.08	40.34	74.57	89.44	63.51
1.250	361	451.250	6.28	13.38	10.56	36.49	95.72	76.89
1.750	115	201.250	2.00	5.97	4.28	23.11	97.72	82.86
2.250	51	114.750	0.89	3.40	2.28	17.14	98.61	86.26
2.750	16	44.000	0.28	1.31	1.39	13.74	98.89	87.57
3.500	20	70.000	0.35	2.08	1.11	12.43	99.24	89.65
4.500	10	45.000	0.17	1.33	0.76	10.35	99.41	90.98
5.500	12	66.000	0.21	1.96	0.59	9.02	99.62	92.94
6.500	6	39.000	0.10	1.16	0.38	7.06	99.72	94.10
8.500	9	76.500	0.16	2.27	0.28	5.90	99.88	96.37
12.500	3	37.500	0.05	1.11	0.12	3.63	99.93	97.48
17.500	1	17.500	0.02	0.52	0.07	2.52	99.95	98.00
22.500	3	67.500	0.05	2.00	0.05	2.00	100.00	100.00
Total	5.749	3.371.750	100.00	100.00				

TABLA 23
ECUADOR
DISTRIBUCION DEL INGRESO DE LA P.E.A.
Area Urbana

Ingreso	Personas	Ingreso Total	o/o de personas	o/o de ingresos	o/o acumu- lado de personas ↓	o/o acumu- lado de ingresos ↓	o/o acumu- lado de personas ↑	o/o acumu- lado de ingresos ↑
1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	44.601	4.460.100	7.54	0.66	100.00	100.00	7.54	0.66
300	106.617	31.985.100	18.02	4.73	92.46	99.34	25.56	5.39
500	95.202	47.601.000	16.09	7.05	74.44	94.61	41.65	12.44
700	74.453	52.117.100	12.59	7.72	58.35	87.56	54.24	20.16
900	63.616	57.254.400	10.76	8.48	45.76	79.84	65.00	28.64
1.100	125.185	137.703.500	21.16	20.39	35.00	71.36	86.16	49.03
2.500	36.041	90.102.500	6.09	13.34	13.84	50.97	92.25	62.37
3.500	17.734	62.069.000	3.00	9.19	7.75	37.63	95.25	71.56
4.500	6.815	30.667.500	1.15	4.54	4.75	28.44	96.40	76.10
6.000	9.713	58.278.000	1.64	8.63	3.60	23.90	98.04	84.73
7.000	4.209	29.463.000	0.71	4.36	1.96	15.27	98.75	89.09
10.000	7.368	73.680.000	1.25	10.91	1.25	10.91	100.00	100.00
Total	591.554	675.381.200	100.00	100.00				

GRAFICO No. 5
GRAFICOS DE GINI
COLOMBIA



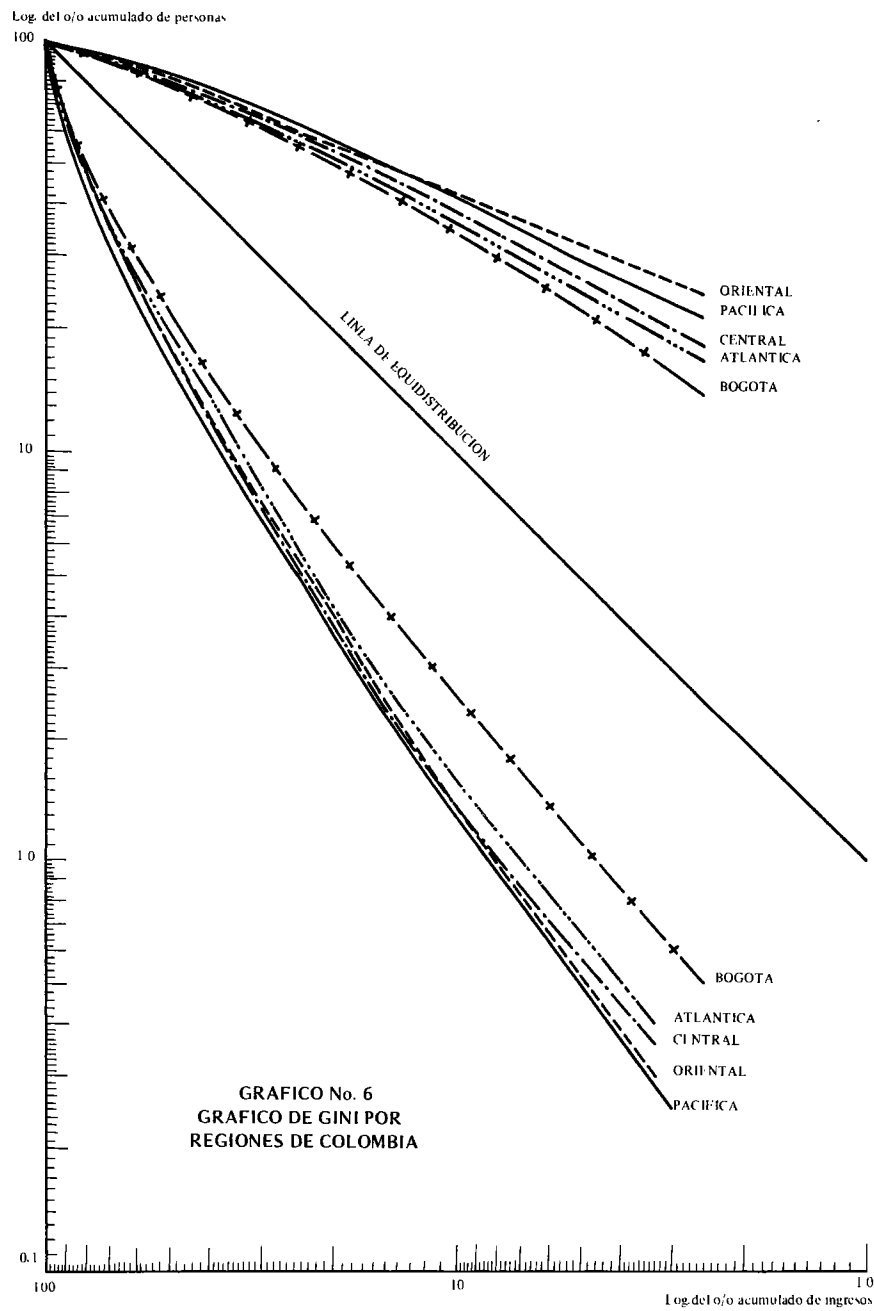
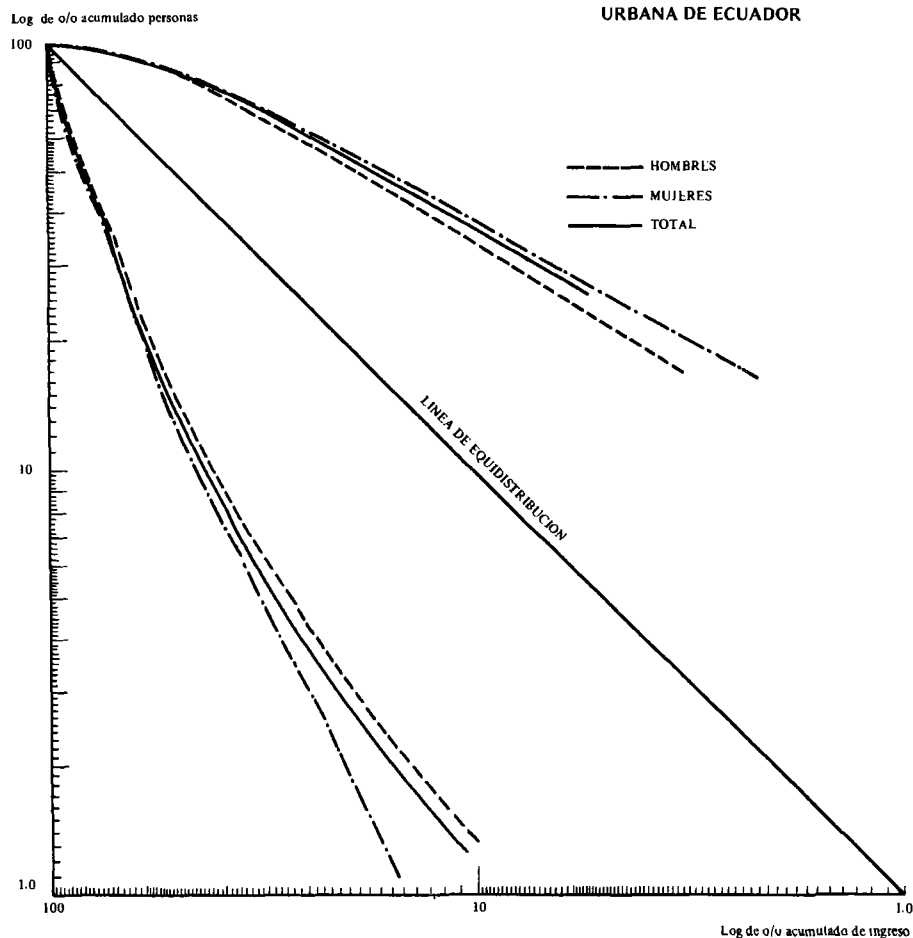


GRAFICO 7
GRAFICO DE GINI PARA EL AREA
URBANA DE ECUADOR



El coeficiente de Gini que corresponde al área urbana del Ecuador es:

$$G = \frac{1}{2(1.1649) - 1} = 0.75$$

y la correspondiente estimación por intervalo es:

$$.58 \leq G \leq 1.00$$

En este caso el estimativo de G difiere al calculado mediante la ecuación (30), 0.5179, y aún está fuera del intervalo de confianza. Esto indica que la ecuación estimada para Pareto es poco confiable, pues como lo manifiesta la prueba de Durbin-Watson (14) la estimación presenta problemas de autocorrelación serial que hacen que la estimación obtenida sea estadísticamente poco aceptable.

CAPITULO V

GRAFICOS SEMI-LOGARITMICOS

Otro instrumento muy útil y sencillo, frecuentemente empleado en el análisis gráfico de la distribución del ingreso, es el llamado gráfico semi-logarítmico propuesto por David Durand en 1943 [13]. Como su nombre lo indica el gráfico relaciona el porcentaje acumulado de unidades perceptoras de ingreso en el eje vertical, con el logaritmo de los diversos niveles de ingreso en el eje horizontal.

El gráfico es muy útil por cuanto permite determinar fácilmente cual es el grado de concentración del ingreso; cuanto mayor sea el grado de inclinación de la curva, mayor será la igualdad en la distribución. Mediante este gráfico es posible también determinar el porcentaje de personas que reciben un ingreso menor o mayor a un nivel cualquiera y, por otro lado, comparando varias distribuciones se puede deducir a cual de ellas corresponden mayores niveles de ingreso. La expresión analítica referente a este tipo de gráfico es de la forma:

$$W = \alpha_1 - \alpha_2 \log Y \quad (31)$$

donde

$$\begin{array}{ll} W & = \text{Porcentaje acumulado de unidades perceptoras} \\ & \text{de ingreso} \\ Y & = \text{Nivel de ingreso.} \\ \alpha_1 \text{ y } \alpha_2 & = \text{Parámetros.} \end{array}$$

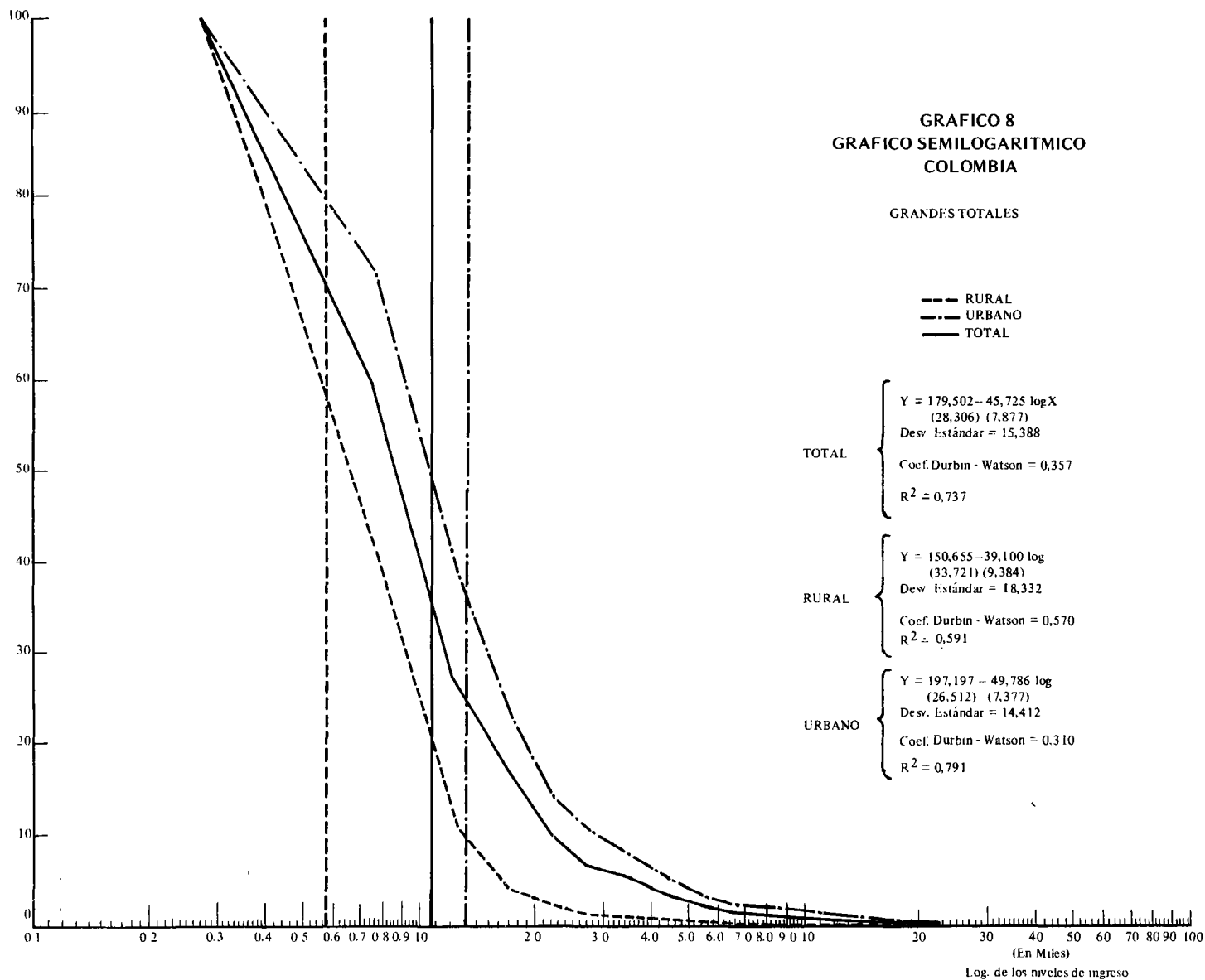
Para identificar la función se deben estimar los parámetros α_1 y α_2 . Esta estimación puede hacerse a través del método de mínimos cuadrados aplicando una transformación semi-logarítmica a la variable independiente (nivel de ingreso) [4].

1. Resultados Prácticos

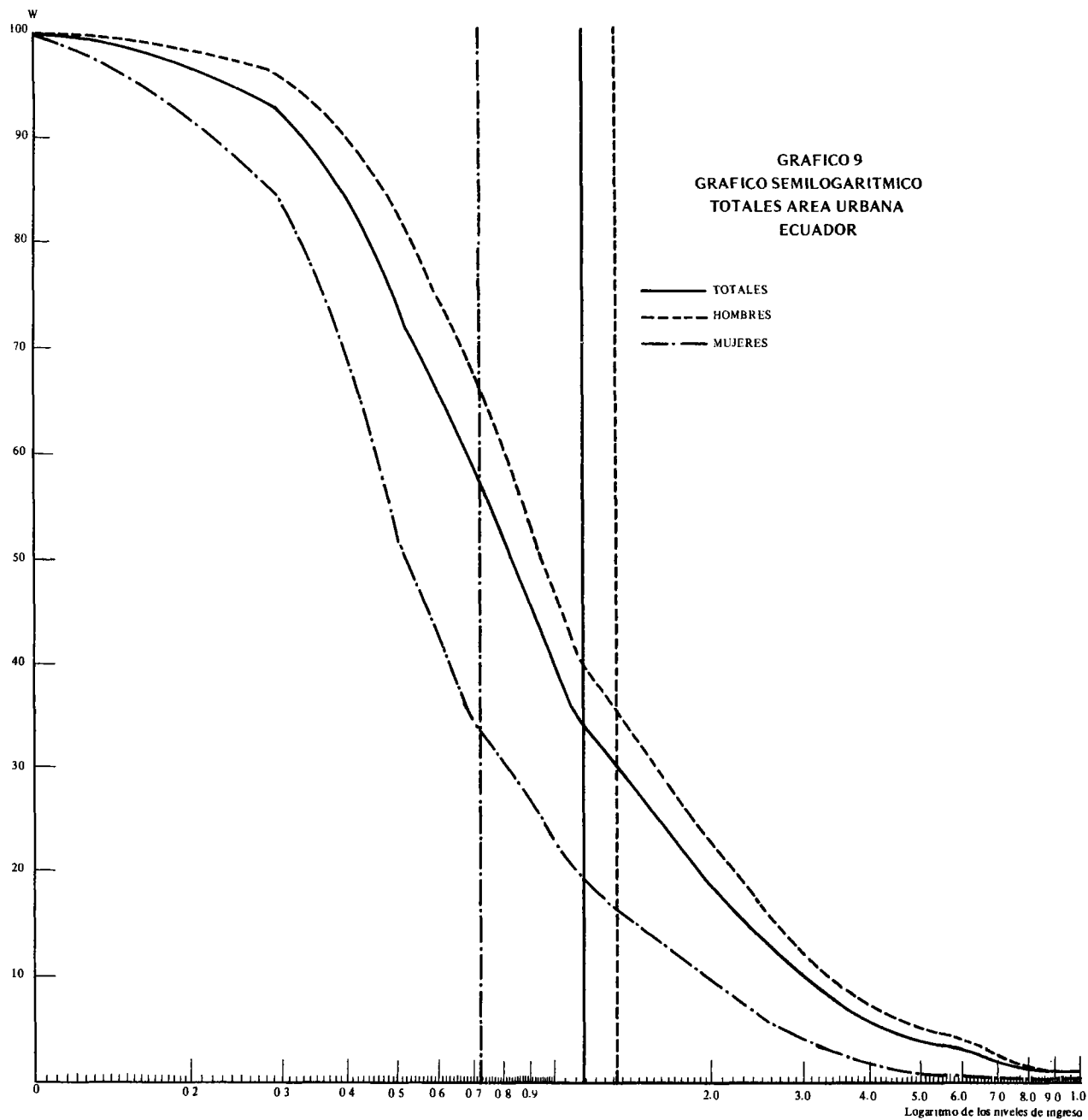
El gráfico 8 indica la representación semi-logarítmica de la distribución de ingresos para el total nacional de Colombia y por áreas urbana y rural. Se observa que los ingresos en el área urbana son significativamente mayores que en el área rural. Los porcentajes de personas que reciben ingresos superiores a \$2.000 en el área rural son muy bajos (30/o) en comparación a la urbana (180/o). Si se quiere calcular la mediana de estas distribuciones basta con observar qué nivel de ingreso corresponde al acumulado del 500/o de personas. Es así como la mediana del ingreso para el área urbana es aproximadamente de \$1.050.00 en tanto que para el área rural es apenas de \$660.00 aproximadamente. Para el total nacional la mediana de ingreso es de \$860.00 aproximadamente, valor próximo al ingreso promedio ya calculado haciendo uso de la función de Pareto. Los promedios de ingreso se representan en el gráfico mediante líneas verticales.

El gráfico 9 es una representación semi-logarítmica de la distribución de ingresos para el área urbana del Ecuador, por sexos. Puede observarse que el nivel de ingresos es mayor en los hombres que en las mujeres, siendo además todos los promedios aritméticos superiores a sus respectivas medianas de ingreso.

o/o acumulado de personas



Porcentaje acumulado de personas



CAPITULO VI

DISTRIBUCION LOGARITMICO-NORMAL

La función de Pareto ya considerada constituye una función de distribución acumulativa de probabilidad y que en último término sirve de base para la definición de las otras funciones antes estudiadas. Se pueden buscar entonces otros modelos probabilísticos que describan la distribución de ingreso considerando el nivel de ingreso como una variable aleatoria a la cual ha de corresponder una determinada función de densidad [18], [20]. El problema a resolver se reduce entonces a la determinación de esta función.

1. Distribución Normal

El primer modelo que se trata de definir se ajusta a una distribución normal. Por lo tanto la función de densidad viene dada por:

$$f(Y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{Y - \mu}{\sigma} \right)^2}$$

donde

Y = Nivel de ingreso (variable aleatoria)
 μ = Ingreso promedio (parámetro)
 σ = Desviación estándar (parámetro).

La función quedaría perfectamente determinada si se conociera μ y σ . Sin embargo, como lo anterior no ocurre estos parámetros son estimados mediante las expresiones:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m f_i Y_i \quad (32) \text{ y}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m f_i (Y_i - \mu)^2 \quad (33)$$

donde

n = Total de informantes, o sea $n = \sum_{i=1}^m f_i$
m = Total de intervalos considerados en la distribución.
 f_i = Frecuencia relativa del i-ésimo intervalo de ingreso.
 Y_i = Nivel de ingreso, tomando como tal la mitad de cada intervalo.

La ecuación (32) define el promedio aritmético ponderado frecuentemente tomado como la medida de la tendencia central en la distribución. No obstante antes de ajustar un modelo de este tipo es necesario verificar si éste representa realmente el tipo de distribución considerada.

2. Pruebas de Asimetría y Curtosis.

Una distribución puede estar correctamente representada por la distribución normal si ella es aproximadamente simétrica. Cuanto más simétrica es la distribución muestral, tiene más sentido la

aplicación de la distribución normal. Para obtener una medida aproximada de la asimetría puede usarse [6], la expresión:

$$C. A = \frac{P_{20} - 2 P_{50} P_{10}}{P_{90} - P_{10}} \quad (34)$$

donde: C.A. = Coeficiente de Asimetría
 P_{90} = Percentil 90
 P_{50} = Percentil 50
 P_{10} = Percentil 10

Para el análisis, si:

- a) C. A. = 0 : Simetría perfecta
- b) C.A. < 0 : Asimetría a la izquierda
- c) C. A. > 0 : Asimetría a la derecha

La segunda prueba mide el grado de apuntamiento o curtosis de la distribución. Para ello se usa la expresión:

$$C.C. = \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{P_{90} - P_{10}} \quad (35)$$

donde: C. C. = Coeficiente de curtosis
 Q_3 = Cuartil tres
 Q_1 = Cuartil uno.

Para el análisis, si:

- a) C. C = 0.263 : Mesocúrtica, no hay problemas de apuntamiento.
- b) C. C < 0.263 : Platicúrtica, la distribución es achatada.
- c) C. C > 0.263 : Leptocúrtica, la distribución es apuntada

Este tipo de pruebas se aplicaron a las principales distribuciones de ingreso para Colombia las mismas que están consignadas en la tabla 24 con sus respectivos valores de los coeficientes de asimetría y curtosis. Se ve allí como todas las distribuciones tienen una tendencia análoga a ser asimétricas a la derecha, y que sólo dos (total rural y hombres rural) no manifiestan forma platicúrtica.

TABLA 24
COLOMBIA
PRUEBAS DE ASIMETRIA Y CURTOSIS
DE LAS DISTRIBUCIONES DE INGRESO
PARA EL TOTAL NACIONAL, AREAS y
SEXOS

Distribución	Coefficiente de Asimetría	Coefficiente de Curtosis
Total nacional	0.4297	0.2172
Total urbano	0.4550	0.2048
Total rural	0.3030	0.2855
Total Hombres	0.4692	0.2075
Total mujeres	0.3720	0.2388
Hombres urbano	0.5370	0.1834
Mujeres urbano	0.3240	0.2189
Hombres rural	0.2923	0.2836
Mujeres rural	0.3910	0.1900

3. Distribución Log-normal .

Los resultados anteriores demuestran la necesidad de ajustar otro tipo de función con características de asimetría a la derecha. Esto puede lograrse [2] si se expresa a la variable ingreso a través de una escala logarítmica correspondiente a una distribución logarítmico-normal cuya función de densidad vendría dada por:

$$f(\log Y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\log Y - \mu)^2}{\sigma^2}}$$

donde:

$\log Y$ = Logaritmo de un nivel cualquiera de ingreso

μ y σ = Parámetros

Como en el caso de la función normal antes considerada, basta conocer μ y σ para que la distribución quede perfectamente determinada. Con los datos muestrales observados puede llegarse a estimar estos parámetros mediante las expresiones:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m f_i \log Y_i \quad (36) \text{ y}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i (\log Y_i - \hat{\mu})^2 \quad (37)$$

Estas expresiones no son otras que las correspondientes a los estimadores máximos verosímiles de los parámetros μ y σ que se caracterizan por ser estimadores insesgados, consistentes, suficientes y de mínima varianza. [3].

3.1 Prueba de Bondad de Ajuste

Si bien es cierto que la distribución log-normal proporciona un ajuste superior al de la distribución normal, una vez determinados μ y σ es necesario cuantificar el grado de ajuste obtenido. Para ello se suele recurrir [19] a la prueba χ^2 usando la expresión:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i} \quad (38)$$

donde:

O_i = Frecuencia observada en la muestra

e_i = Frecuencia esperada según la distribución teórica.

Aprovechando el hecho de que la variable así definida es una variable aleatoria con distribución χ^2 y n grados de libertad, se construye la prueba de hipótesis con un nivel de significación del 50/o. Para tomar una decisión se comparan los dos valores así:

Si $\chi^2 \leq \chi^2 (0.95, n)$, el ajuste es bueno.

Si $\chi^2 > \chi^2 (0.95, n)$ el ajuste es deficiente.

3.2 Aplicaciones del Modelo

Determinados $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$ y verificada la bondad del ajuste se pueden obtener algunos resultados interesantes así:

a) Ingreso Promedio

Este valor no es otro que el antilogaritmo de $\hat{\mu}$, equivalente a una media geométrica. Puede considerarse a esta como una buena estimación por cuanto no está influenciada por valores extremos. Esta característica hace que esta estimación sea superior al simple promedio aritmético cuyo uso se justifica bajo la teoría normal. Este hecho explica las diferencias que se presentan al estimar el ingreso promedio a través de las expresiones (32) y (36).

b) Porcentajes de Unidades perceptoras de Ingreso

Haciendo uso de la transformación reducida

$$Z = \frac{\log Y - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \quad \text{con} \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} \quad (39)$$

se puede hallar el porcentaje de unidades perceptoras de ingreso en un intervalo cualquiera de ingreso. Así para hallar la proporción de personas que reciben un ingreso menor o igual a un nivel Y_x , bastará con buscar el área que hay bajo la curva normal desde menos infinito hasta el punto:

$$Z_x = \frac{\log Y_x - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$$

Si lo que se quiere es la proporción de personas que reciben un ingreso comprendido entre los niveles Y_1 y Y_2 ($Y_1 > Y_2$), se buscará el área que bajo la curva normal esta comprendida entre los puntos:

$$Z_1 = \frac{\log Y_1 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \quad \text{y} \quad Z_2 = \frac{\log Y_2 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \quad (40)$$

Por otro lado si se conoce el total de individuos que en la población o universo pertenece a la distribución a la cual se ha ajustado la distribución log-normal, se puede determinar el número de unidades perceptoras de ingreso que tienen un nivel de ingreso comprendido en un intervalo cualquiera. Bastará con multiplicar las

proporciones obtenidas mediante los sistemas ya explicados por el número total de individuos en el tramo poblacional considerado.

4) Resultados Prácticos

Aplicando las ecuaciones (36) y (37) se han obtenido para Colombia y Ecuador los estimadores que determinan la distribución log-normal para todas las distribuciones a las cuales se ha ajustado la distribución de Pareto. Las tablas de resultados contienen en la primera columna la identificación de la distribución a que se refieren los datos, en la segunda la esperanza matemática μ' , en la tercera la varianza σ^2 y en la cuarta la desviación estándar σ . Conviene hacer algunos comentarios con respecto a los resultados obtenidos.

Una vez obtenidos los estimativos contenidos en las tablas 26 a 41 se procedió a realizar la prueba de bondad de ajuste. La tabla 25 contiene los resultados para Colombia de dicha prueba para algunos sectores de estudio (columna 1). En la columna 2 se anotan los valores calculados según (38) y en la 3 los valores a contrastar que trae la tabla χ^2 (0.95, n). Al analizar estos valores se observa que todos son significativos por lo cual podría deducirse que el ajuste es deficiente. Sin embargo si se busca cual es el intervalo de ingreso que más contribuye a elevar el valor de χ^2 se observa que éste siempre corresponde al de máximo ingreso. O sea que el ajuste pierde eficiencia cuando se analizan los ingresos muy altos tales como los que señala la columna (4) de la tabla 25. De otra parte, si se busca la diferencia porcentual máxima, en valor absoluto, que se presenta en cada distribución entre los porcentajes observados y los ajustados, (columna 5 tabla 25), se encuentra que estos no son altos pues la mayor diferencia observada es de 6.43o/o que por otro lado corresponde a una distribución con solo 4 intervalos de ingreso observados, esto es con 4 puntos para el ajuste. Por lo tanto estas consideraciones harían concluir que los ajustes obtenidos si son aceptables.

TABLA 25
COLOMBIA
COMPARACIONES DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE DE LAS DISTRIBUCIONES
DE INGRESO TOTAL, POR AREAS Y SEXO.

Sector de Estudio	Valor de χ^2	Valor a Contrastar	Nivel de Ingreso con mayor $\chi^2_{(*)}$	Diferencia porcentual máxima
1	2	3	4	5
Total Nacional	1.042.7	26.1	14	2.18
Total Urbano	571.3	26.1	14	4.08
Total Rural	158.3	26.1	9	1.14
Total Hombres	1.094.5	26.1	14	3.57
Total Mujeres	39.0	26.1	11	0.55
Hombres Urbano	349.4	26.1	14	5.16
Mujeres Urbano	49.8	26.1	12**	3.04
Hombres Rural	186.7	26.1	9	1.79
Mujeres Rural	76.0	20.5	4**	6.43

(*) Según los códigos de la tabla 20.

(**) Máximo nivel de ingreso informado.

TABLA No.26
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESOS POR TOTALES REGIONES
Y AREAS
JEFES DE HOGAR

Regiones y Areas	Esperanza Mate- mática (μ)	Varianza (σ^2)	Desviación Estandar (σ)
Rural	2.752.177	0.132403	0.363873
Urbana	3.112.297	0.199479	0.446630
Total Nacional	2.972.269	0.205853	0.453711
Bogotá:			
Urbano	3.010.581	0.169218	0.411361
Rural	2.836.689	0.109936	0.331567
Total	3.010.006	0.169898	0.412187
Oriental:			
Urbano	2.841.405	0.150124	0.387458
Rural	2.623.549	0.094879	0.308024
Total	2.716.710	0.130371	0.361069
Atlántico:			
Urbana	2.897.944	0.162953	0.403674
Rural	2.712.819	0.105608	0.324974
Total	2.822.853	0.147099	0.383535
Pacífica:			
Urbana	2.838.461	0.170815	0.413297
Rural	2.544.889	0.072114	0.268540
Total	2.714.954	0.150501	0.387944
Central:			
Urbana	2.913.505	0.144215	0.379757
Rural	2.633.366	0.089122	0.298533
Total	2.794.520	0.140012	0.374181

TABLA No.27
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR ACTIVIDADES
TOTAL NACIONAL

Actividades	Esperanza Matemática (μ)	Varianza (σ^2)	Desviación Estándar (σ)
Servicios comunales			
sociales y personales	2.893316	0.154644	0.393248
Establecimientos financieros	3.221087	0.145820	0.381864
Transporte y comunicaciones	3.025226	0.130387	0.361091
Comercio, restaurantes hoteles	2.884064	0.179031	0.423121
Construcción	2.879451	0.135907	0.368656
Electricidad, gas, y agua	3.151893	0.139081	0.372937
Industria manufacturera	2.830791	0.151529	0.389268
Minas y canteras	2.852119	0.229029	0.478570
Agricultura, caza, pesca	2.631109	0.099929	0.316115

TABLA No.28
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESOS POR ACTIVIDADES
AREA URBANA (P.E.A.)

Actividades	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Servicios comunales			
sociales y personales	2.924721	0.153148	0.391341
Electricidad, gas y agua	3.071365	0.134985	0.367403
Establecimientos financieros	3.229090	0.142700	0.377757
Transporte y comunicaciones	3.046726	0.130392	0.361099
Comercio, restaurante y hoteles	2.908896	0.181614	0.426162
Construcción	2.907058	0.137345	0.370602
Industria manufacturera	2.879318	0.149377	0.386493
Minas y canteras	3.006977	0.232347	0.482023
Agricultura, caza, pesca	2.725684	0.162037	0.402538

TABLA No.29
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESOS POR ACTIVIDADES
AREA RURAL (P.E.A.)

Actividades	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Servicios	2.659494	0.093254	0.305375
Establecimientos financieros	2.946675	0.233954	0.483688
Transporte	2.877944	0.112700	0.335708
Comercio, restaurante, hoteles	2.693943	0.125264	0.353926
Construcción	2.740711	0.099689	0.315735
Electricidad, gas y agua	2.691962	0.092602	0.304305
Industria manufacturera	2.600048	0.094922	0.308094
Minas y canteras	2.734246	0.194833	0.441399
Agricultura	2.612878	0.083726	0.289354

TABLA No.30
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR NIVEL OCUPACIONAL
TOTAL NACIONAL (P.E.A.)

Ocupaciones	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Artesanos y operarios	2.895544	0.107553	0.327953
Obreros no agrícolas	2.701340	0.118745	0.344595
Jornaleros, conductores no especificados	2.855225	0.109164	0.330400
Trabajadores agrícolas forestales	2.621811	0.095141	0.308449
Trabajadores de servicios	2.724503	0.093028	0.305005
Comerciantes vendedores	2.905516	0.205653	0.453490
Personal administrativo similares	3.330322	0.152175	0.390096
Directores y funcionarios públicos superiores	3.651509	0.203043	0.450603
Profesionales no técnicos	3.429515	0.170861	0.413354
Profesionales técnicos	3.539517	0.202789	0.450321

TABLA No.31
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR NIVEL OCUPACIONAL
AREA URBANA (P.E.A.)

Ocupaciones	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Artesanos y operarios	2.916365	0.102963	0.320879
Obreros no agrícolas	2.748435	0.123332	0.351186
Jornaleros conductores no especificados	2.887643	0.104917	0.323909
Trabajadores agrícolas forestales	2.699495	0.145971	0.382061
Trabajadores de servicios	2.754263	0.092297	0.303805
Comerciantes y vendedores	2.930998	0.210308	0.458594
Personal administrativo y similares	3.112919	0.117761	0.343163
Directores y funcionarios públicos	3.694210	0.140631	0.375008
Profesionales no técnicos	3.256516	0.115032	0.339164
Profesionales técnicos	3.346999	0.190363	0.436306

TABLA No.32
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR NIVEL OCUPACIONAL
AREA RURAL (P.E.A.)

Ocupaciones	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Artesanos y operarios	2.743786	0.107987	0.328614
Obreros no agrícolas	2.575894	0.082760	0.287680
Jornaleros y conductores no especificados	2.727629	0.102291	0.319830
Trabajadores agrícolas y forestales	2.606317	0.081067	0.284722
Trabajadores de servicios	2.586119	0.072415	0.269100
Comerciantes y vendedores	2.718705	0.132762	0.364365
Personal administrativo y similares	2.841022	0.163134	0.403898
Directores y funcionarios públicos	3.606514	0.214108	0.462718
Profesionales no técnicos	3.009723	0.049642	0.222805
Profesionales técnicos	3.145844	0.269237	0.518881

TABLA No.33
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR POSICION OCUPACIONAL (P.E.A.)

Posición Ocupacional	Esperanza Matemática	Varianza	Désviación Estándar
TOTAL			
Cuenta propia	2.669336	0.124262	0.352509
Empleador	2.946866	0.238463	0.488327
Obreros	2.675360	0.087612	0.295994
Empleados	2.976421	0.153836	0.392220
AREA RURAL			
Cuenta propia	2.581801	0.078330	0.279875
Empleador	2.762428	0.142077	0.376931
Obreros	2.584495	0.065748	0.256414
Empleados	2.776741	0.136263	0.369139
AREA URBANA			
Cuenta propia	2.746474	0.151692	0.389476
Empleador	3.157327	0.264238	0.514041
Obreros	2.803514	0.094897	0.308054
Empleados	3.002161	0.149844	0.387097

TABLA No.34
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR NIVEL EDUCACIONAL
TOTAL NACIONAL
(Jefes de Hogar)

Nivel Educativo	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Ninguna	2.747802	0.126404	0.355533
Primaria urbana	2.978688	0.161353	0.401688
Primaria rural	2.786217	0.138414	0.372040
Total Primaria *	2.909961	0.161147	0.401432
Bachillerato básico	3.223147	0.142322	0.377256
Bachillerato clásico	3.396235	0.177978	0.421874
Otra secundaria	3.409811	0.058344	0.241546
Secundaria técnica o vocacional	3.353248	0.175338	0.418734
Normal	3.344494	0.129465	0.359812
Total secundaria**	3.306583	0.162160	0.402691
Superior universitaria	3.716867	0.182968	0.427747
Otras	3.384549	0.219639	0.468650

**=Incluye bachillerato clásico, básico y otra secundaria.

*=Incluye primaria urbana y rural

TABLA No.35
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR NIVEL EDUCATIVO
AREA URBANA
(Jefes de Hogar)

Nivel Educativo	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Ninguna	2.834014	0.141126	0.375667
Primaria urbana	3.039074	0.151807	0.389625
Primaria rural	2.950294	0.149362	0.386473
Total primaria*	3.027652	0.152254	0.390197
Bachillerato básico	3.242808	0.140700	0.375101
Bachillerato clásico	3.411217	0.171425	0.414035
Otra secundaria	3.402388	0.058579	0.242030
Secundaria técnica o vocacional	3.366169	0.170963	0.413476
Normal	3.367777	0.135820	0.368538
Total secundaria**	3.318937	0.158747	0.398431
Superior universitaria	3.717965	0.180545	0.424905
Otras	3.391915	0.218658	0.467609

TABLA No.36
COLOMBIA
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR NIVEL EDUCATIVO
AREA RURAL
(Jefes de Hogar)

Nivel Educativo	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Ninguna	2.703743	0.113435	0.336801
Primaria urbana	2.792138	0.142558	0.377569
Primaria rural	2.740830	0.126417	0.355551
*Total primaria	2.759350	0.132807	0.364428
Bachillerato básico	3.013394	0.114865	0.338917
Bachillerato clásico	3.145801	0.212319	0.460781
Otra secundaria	3.628388	0.000000	0.000000
Secundaria técnica o vocacional	3.003847	0.195652	0.442325
Normal	3.133738	0.029523	0.171823
**Total secundaria	3.061465	0.151169	0.388804
Superior universitaria	3.709873	0.210151	0.458422
Otras	3.314420	0.213286	0.461829

**= Incluye bachillerato clásico, básico y otra secundaria.

* = Incluye primaria urbana y rural

TABLA 37
ECUADOR
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR NIVEL EDUCACIONAL
GRADO MAS ALTO APROBADO
Area Urbana (P.E.A.)

Nivel Educativo	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Total	2.898090	0.150685	0.388181
Hombres	2.972091	0.142167	0.377051
Mujeres	2.713000	0.126848	0.356157
Sin estudio	2.635285	0.073794	0.271650
Primaria de 1-3	2.716890	0.093676	0.306065
Primaria de 4-6	2.826954	0.112589	0.335543
Secundaria de 1-3	2.944769	0.119766	0.346072
Secundaria de 4-6	3.171848	0.122043	0.349346
Superior de 1-3	3.359394	0.119088	0.345091
Superior de 4-6	3.594576	0.076909	0.277325

TABLA No.38
ECUADOR
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL DE INGRESO
POR RAMA DE ACTIVIDAD ECONOMICA
Area Urbana (P.E.A.)

Actividad - Económica	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Total	2.897209	0.151580	0.389333
Agricultura, silvicultura, caza y pesca	2.849277	0.155969	0.394930
Explotación minas y canteras	3.126434	0.073490	0.271090
Industria manufacturera	2.814268	0.122554	0.350078
Construcción	2.941352	0.113694	0.337185
Electricidad, gas, agua y servicios sanitarios	3.029099	0.054765	0.234019
Comercio	2.969149	0.156104	0.395100
Transporte, almacenamiento comunicaciones	3.022059	0.111263	0.333560
Servicios	2.871261	0.170057	0.412379
Actividades no bien especificadas	2.934664	0.276887	0.526200

TABLA No.39
ECUADOR
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESO POR GRUPO PRINCIPAL DE
OCUPACION

Area Urbana (P.E.A.)

Grupos de Ocupación	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Ambos sexos	2.897209	0.151580	0.389333
Profesionales, técnicos y afines	3.239870	0.124502	0.352848
Gerentes administradores y afines	3.550638	0.116328	0.341069
Oficinistas y afines	3.082714	0.122532	0.350046
Vendedores y similares	2.916724	0.152661	0.390719
Agricultores, pescadores madereros y afines	2.839178	0.153605	0.391925
Mineros, canteros y afines	2.966042	0.025404	0.159387
Conductores de transportes y afines	3.055228	0.089012	0.298349
Artesanos y operarios	2.802710	0.096372	0.310439
Obreros, jornaleros, neoc.	2.893476	0.083870	0.289602
Trabajadores de servicios y afines	2.644756	0.090158	0.300263
Otros trabajadores, neoc.	3.244040	1.743509	0.417553

TABLA No.40
ECUADOR
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA
NORMAL DE INGRESO POR
CATEGORIA DE OCUPACION

Area Urbana (P.E.A.)

Categoría de Ocupación	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Total	2.897994	0.151023	0.388617
Hombres	2.974858	0.142083	0.376939
Mujeres	2.709930	0.122997	0.350709
Empleado o asalariado	2.885142	0.140548	0.374897
Patronos	3.255363	0.160646	0.400807
Cuenta propia	2.860472	0.145090	0.380906

TABLA No.41
ECUADOR
AJUSTES DISTRIBUCION LOGARITMICA NORMAL
DE INGRESOS POR HORAS TRABAJADAS
Area Urbana (P.E.A.)

Horas Trabajadas	Esperanza Matemática	Varianza	Desviación Estándar
Total	2.897994	0.151023	0.388617
De 1 – 14 horas	2.577529	0.079881	0.282632
De 15 – 34 Horas	2.835048	0.141696	0.376425
De 35 – 40 horas	2.966350	0.170147	0.412488
De 41 – 48 horas	2.906531	0.133451	0.365309
49 horas o más			

4.1 Aplicaciones al caso colombiano

Con el propósito de ilustrar la aplicación del modelo se han tomado como ejemplo los resultados del ajuste para la distribución de ingreso de Colombia, total nacional. En este caso los estimadores de μ y σ son:

$$\hat{\mu} = 2.972269 \quad \hat{\sigma} = 2.45371$$

Si se quiere determinar por ejemplo la proporción de personas con un ingreso menor o igual a \$800.00 mensuales se tendría que esta será igual al área bajo la curva normal comprendida entre menos infinito y el punto Z_1 ; (ecuación 40) :

$$Z_1 = \frac{\log 800 - 2.972269}{0.453711} = -0.152473$$

Buscando el equivalente de este resultado en las tablas de la distribución normal [3], se encuentra que la proporción obtenida es igual al 44.04o/o.

Para obtener un estimativo del número de personas con un ingreso mensual de \$800 o menos, se multiplica el total de personas ocupadas por la proporción encontrada. El personal ocupado en el país, según los datos de la "Encuesta de Hogares – DANE 1970" es de 5.766.800. Por lo mismo

$$5.766.800 \times 0.4404 = 2.539.699$$

es el número de personas que en Colombia reciben un ingreso menor o igual a \$800.00 mensuales.

Si se desea estimar la proporción de personas que reciben un ingreso comprendido entre \$800.00 y \$1.000.00 pesos mensuales, esta será igual al área bajo la curva normal comprendida entre los puntos Z_1 . ya obtenido, y el punto:

$$Z_2 = \frac{\log 1.000 - 2.972269}{0.453711} = 0.061120$$

La proporción resultante es 8.32o/o

En este caso el número de personas que reciben un ingreso mensual comprendido entre \$ 800.00 y \$1.000.00 es

$$5.766.800 \times 0.0832 = 479.798$$

Por último el ingreso promedio para el total nacional, viene estimado por:

$$\text{antilog } 2.972269 = \$ 938.15$$

Este valor en comparación con los estimados por otros métodos es bajo por tener en cuenta los valores extremos de la distribución.

4.2 Aplicaciones al caso ecuatoriano

Para el área urbana del Ecuador se encontró que los valores estimados para μ y σ son :

$$\hat{\mu} = 2.898090 \quad \text{y} \quad \hat{\sigma} = 0.388181$$

Esto significa que el promedio geométrico de ingreso es:

$$\text{antilog } 2.898090 = \$ 790.84$$

El porcentaje de personas que reciben un ingreso menor a \$500.00 sucres viene dado por el área bajo la normal desde menos infinito hasta

$$Z_1 = \frac{2.698970 - 2.898090}{0.388181} = 0.51$$

Por lo tanto la proporción buscada es 30.50/o.

Si lo que se quiere es el porcentaje de personas con un ingreso entre \$500.00 y \$1.000.00 sucres, este será el área bajo la normal comprendida en el punto Z_1 ya hallado y el punto:

$$Z_2 = \frac{3.000.000 - 2.898090}{0.388181} = 0.26$$

Buscando el equivalente en las tablas de la distribución normal, la proporción resultante es 29.75/o.

Para estimar el número de personas que en el área considerada ganan menos de \$500.00 y siendo la población económicamente activa urbana del Ecuador de 591.554, sin contar aquellos trabajadores que no tienen remuneración, que se ignora, o que son nuevos [9] el estimativo será:

$$591.554 \times .3050 = 180.424 \text{ personas}$$

De la misma manera, el número estimado de personas con un ingreso entre \$500.00 y \$1.000.00 sucres será:

$$591.554 \times .2975 = 175.987 \text{ personas.}$$

II PARTE

CAPITULO I

LA DISTRIBUCION DE INGRESOS EN EL AMBITO INTERNACIONAL

La Distribución de Ingresos en el Ambito Internacional

Con el objeto de hacer posible la comparación de la distribución de ingresos de un país con la existente en otros países, se presenta a continuación información relevante sobre ingresos de varias naciones para las cuales ha sido posible obtener los datos respectivos. Al final se presenta una bibliografía y las fuentes de información que sirvieron de base para los cálculos y presentación de resultados.

1. FORMACION DE GRUPOS DE PAISES

Para hacer más viable la comparación internacional de un país con otros de su misma región o de características socio-económicas más o menos similares, se ha dividido a los países para los cuales se logró obtener información, en tres grupos.

Los grupos A y B están conformados por países que tienen por lo menos dos de cuatro características que definen al grupo. En el cuadro siguiente se especifican estas características.

CARACTERISTICAS	GRUPO A	GRUPO B
1. Ingreso anual per-cápita en dólares	Menos de 400	De 400 a 1.000
2. Tasa de crecimiento anual de la población	Superior al 3o/o	Del 2o/o al 3o/o
3. Tasa de crecimiento anual del producto interno bruto	Menor del 5o/o	Del 5 al 6.5o/o
4. Participación de la agricultura en el total de la producción	Más del 30o/o	Menos del 30o/o

Al grupo C pertenecen aquellos países que pueden ser considerados como de economía desarrollada (*).

De acuerdo a lo anterior, se clasificaron en el grupo A a los siguientes países: Ceilán, India, Pakistán, Madagascar, Marruecos, Sierra Leona, Tanzania, Bolivia, Ecuador, Perú y Costa Rica. En el grupo B se clasificaron: Birmania, Taiwan, Irak, Líbano, Filipinas, Chad, Dahomey, Gabón, Costa Marfil, Kenya, Libia, Niger, Nigeria, Zambia, Rhodesia del Sur, Senegal, Sur-Africa, Sudán, Túnez, Brasil, Chile, El Salvador, Jamaica, México, Panamá, Venezuela, Puerto Rico, Argentina y Surinam. Al grupo C corresponden: Israel, Japón, Estados Unidos de América, Francia y República Federal Alemana.

2. ANALISIS POR GRUPOS DE PAISES

Para todos estos países se ha calculado el coeficiente de concentración de ingresos a través del cual se podrá tener una visión de la situación prevaleciente en cuanto a una mayor o menor concentración de ingresos. Como ya se ha mencionado, este coeficiente tiene valores positivos menores que uno. Cuando el coeficiente tiende a cero, la distribución tiende a ser igualitaria y cuando tiende a la unidad, la distribución tiende a ser más desigual o sea hay mayor concentración de ingresos en pocos tramos de la población (**).

El gráfico No. 11 presenta estos resultados en forma de barómetros por grupos de países. Puede observarse que los más altos coeficientes de concentración corresponden al grupo B de países siendo los más notables los referentes a Libia (0.82) y Kenya (0.66). El menor coeficiente del grupo es el de Surinam (0.31). Colombia se sitúa más o menos en el coeficiente promedio del grupo (0.52) sin ser este desde luego un coeficiente bajo.

En el grupo A también se presentan coeficientes altos aunque menores que en el grupo B. Perú es el país que en el grupo presenta la más alta concentración de ingresos (0.63) mientras que a la India corresponde el más bajo coeficiente (0.33). El Ecuador tiene un índice de concentración (0.52), aunque no elevado, sí por encima del promedio de los países de su grupo.

3. ANALISIS POR LOCALIZACION GEOGRAFICA DE PAISES

Se ha organizado a los países sobre los cuales se obtuvo información, por localización geográfica, ya sea que estos pertenezcan a Asia, Africa, América y Europa. La tabla 42 indica esta clasificación con información para cada país de su coeficiente de concentración estimado, el ingreso per-cápita en dólares, su población total, tasa de crecimiento de la población, tasa de crecimiento del Producto Interno Bruto y la participación de la agricultura con relación a la producción nacional total.

Al observar la tabla 42 puede verse que la mayor concentración de ingresos se encuentra en los países africanos puesto que la mayoría de ellos tienen coeficientes sobre 0.50; el promedio aproximado del coeficiente está alrededor de 0.52. El país que indica mayor concentración de ingresos es Libia (0.82) mientras que a Niger corresponde la menor concentración (0.32).

Los países americanos manifiestan también altas concentraciones de ingreso. El coeficiente promedio puede estimarse alrededor de 0.50, siendo el Perú y Salvador los países con más altos índices (0.63) y (0.62) respectivamente, y Surinam y Estados Unidos los más bajos (0.31) y (0.35) en su orden.

En Asia la situación es menos aguda. La mayor parte de países tienen coeficientes por debajo de 0.50 estando el promedio alrededor de 0.44. Irak y Líbano son los países con más alta concentración (0.58) y (0.52) respectivamente, mientras que Israel (0.31) e India (0.34) manifiestan menor concentración de ingresos.

(*) Se adoptó para este grupo la clasificación que sobre este aspecto trae el Anuario Estadístico de Cuentas Nacionales de Naciones Unidas, 1969, Vol. II.

(**) Para una comparación más precisa entre países es importante tener en cuenta el tipo de investigación o fuente de información tomados como base para el análisis, las mismas que se detallan en sección especial.

Para Europa solamente fue posible calcular coeficientes de concentración para Francia con un valor realmente bajo (0.33) y para la República Federal Alemana con un coeficiente más bien alto (0.47).

4. ESTIMACION DEL COEFICIENTE b DE PARETO POR PAISES

Con los coeficientes de concentración (G) calculados puede obtenerse una cruda estimación del coeficiente b de Pareto para cualquier país, de la siguiente forma:

Como:

$$G = \frac{1}{2b - 1}$$

Se tiene:

$$b = \frac{1 + G}{2G}$$

Así por ejemplo, como el índice de Gini para Japón es de 0.40, entonces:

$$b = \frac{1 + 0.40}{2(0.40)} = 1.75$$

Con este valor de b estimado pueden aplicarse los métodos de cálculo explicados y obtener las diversas funciones analizadas.

5. GRAFICO DE LORENZ

Utilizando la información existente para varios países latinoamericanos se ha elaborado un gráfico de Lorenz en el cual se representan las distribuciones de ingreso para Argentina, Bolivia, Chile, Colombia, Brasil, Ecuador, Perú, Méjico y Venezuela. Del gráfico se desprende que la menor igualdad en la distribución se encuentra en Perú y Brasil en tanto que Chile y Argentina presentan menores concentraciones de ingresos. Ver gráfico (12).

TABLA No. 42
CUADRO COMPARATIVO DE DISTRIBUCION DE INGRESOS
DE PAISES SEGUN LOCALIZACION GEOGRAFICA Y OTRAS
CARACTERISTICAS

Países	Coeficiente de Concentración 1/	Ingreso Anual Per-Cápita (Dólares) 1968 2/	Población 1971 Millones 3/	Tasa de crecimiento de la población 3/	Tasa-Pro-medio de crecimiento PIB 2/ 1950-68	Participación de la agricultura con relación a la producción nacional total (o/o) 1968 2/
ASIA						
Ceilán	0.4543	131	12.9	2.4	3.914/	39
India	0.3380	71	569.5	2.6	3.6 10/	52. 6/
Pakistan	0.3793	121	141.6	3.3	4.0	46
Taiwan (China)	0.4611	247	14.3	2.3	—	23
Irak	0.5775	228 6/	10.0	3.4	6.3 12/	19
Líbano	0.5185	427 6/	2.9	3.0	—	11 6/
Filipinas	0.4957	250	39.4	3.4	5.7	34
Israel	0.3088	1.158	3.0	2.4	—	8
Japón	0.400	1.122	104.7	1.1	—	10

(Continuación Tabla No. 42)

Países	Coficiente de Concentración 1/	Ingreso Anual Per-Cápita (Dólares) 1968 2/	Población 1971 Millenes 3/	Tasa de crecimiento de la población 3/	Tasa-Propmedio de crecimiento PIB 2/ 1950-68	Participación de la agricultura con relación a la producción nacional total (o/g) 1968 2/
AFRICA						
Madagascar	0.5080	97 6/	7.1	2.7	2.7	—
Marruecos	0.5182	185	16.3	3.3	2.2 11/	35
Sierralcona	0.5847	126	2.7	2.3	3.7 22/	34 5/
Tanzania	0.4912	60 4/	13.6	2.6	4.3 19/	50
Chad	0.3170	60 4/	3.8	2.4	—	—
Dahomey	0.4025	69 5/	2.8	2.6	—	—
Gabón	0.6280	427 6/	0.5	0.9	—	22 5/
Costa de Marfil	0.4140	212 6/	4.4	2.4	—	41 5/
Kenya	0.6628	107	11.2	3.1	6.9 23/	35
Libia	0.8150	1.239	1.9	3.1	27.3 21/	3
Niger	0.3155	78 5/	4.0	2.9	—	59 5/
Nigeria	0.4921	68 5/	56.5	2.6	5.8 16/	56 5/
Zambia	0.4926	236	4.4	3.0	6.8 13/	9 6/
Rhodesia del Sur	0.5875	170	5.2	3.4	3.6 13/	16
Senegal	0.5680	183	4.0	2.4	—	—
Sur-Africa	0.5726	550	20.6	2.4	5.1	10
Sudán	0.4290	97 6/	16.3	3.2	6.5 14/	54 7/
Tunez	0.5509	181	5.3	3.1	3.7 20/	17
AMERICA						
Colombia	0.5212	299	22.1	3.4	4.6 10/	31
Bolivia	0.5282	151	4.8	2.4	2.3	19
Ecuador	0.5179	196	6.3	3.4	4.5 8/	32
Perú	0.6343	246	14.0	3.1	5.5	17
Costa Rica	0.4956	384	1.9	3.8	—	24
Brasil	0.5461	271 6/	95.7	2.8	6.2 10/	19 5/
Chile	0.4465	449	10.0	2.3	4.0	9 5/
EL Salvador	0.6244	245	3.6	3.4	6.8 17/	27
Jamaica	0.5677	411	2.0	2.1	7.2 9/	10
México	0.5341	511	52.5	3.4	6.2 10/	16 6/
Panamá	0.4761	507	1.5	3.3	7.9 20/	24
Venezuela	0.4368	803	11.1	3.4	6.7	8
Puerto Rico	0.4460	1.250	2.9	1.4	9.3 18/	5
Argentina	0.4340	609	24.7	1.5	3.3	14
Surinam	0.3118	335 4/	9.4	3.2	—	13 4/
Estados Unidos	0.3482	3.578	207.1	1.1	3.7	3

(Continuación Tabla No. 42)

Paises	Coficiente de Concentración 1/	Ingreso Anual Per-Cápita (Dólares) 1968 2/	Población 1971 Millones 3/	Tasa de cre- cimiento de la pobla- ción 3/	Tasa-Pro- medio de crecimiento PIB 2/ 1950-68	Participación de la agricul- tura con rela- ción a la pro- ducción na- cional total (o/o) 1968 2/
--------	---	---	-------------------------------------	--	---	--

EUROPA

Francia	0.3347	1.927	51.5	0.7	5.1	7
República Fed. Alemania	0.4703	1.682	58.9	0.4	6.2	4
España		663	33.6	1.0	6.0 13/	16

1/ FUENTE: Ver anexo sobre bibliografía y fuentes de información por países. 2/ FUENTE: Anuario de Estadísticas de cuentas nacionales. Naciones Unidas. Vol. II, 1969. 3/ FUENTE: Population Reference Bureau, Inc., Boletín Junio 1971. 4/ Datos a 1965. 5/ Datos a 1966. 6/ Datos a 1967. 7/ Datos a 1964. 8/ Promedio 1950-64. 9/ Promedio 1950-66. 10/ Promedio 1950-67. 11/ Promedio 1952-68. 12/ Promedio 1953-68. 13/ Promedio 1954-68. 14/ Promedio 1955-64. 15/ Promedio 1956-68. 16/ Promedio 1958-65. 17/ Promedio 1959-67. 18/ Promedio 1959-68. 19/ Promedio 1960-67. 20/ Promedio 1960-68. 21/ Promedio 1962-68. 22/ Promedio 1963-66. 23/ Promedio 1964-68.

OBSERVACIONES: Indica datos no disponibles.

GRAFICO No. 11
COEFICIENTE DE CONCENTRACION DE INGRESOS
POR GRUPOS DE PAISES

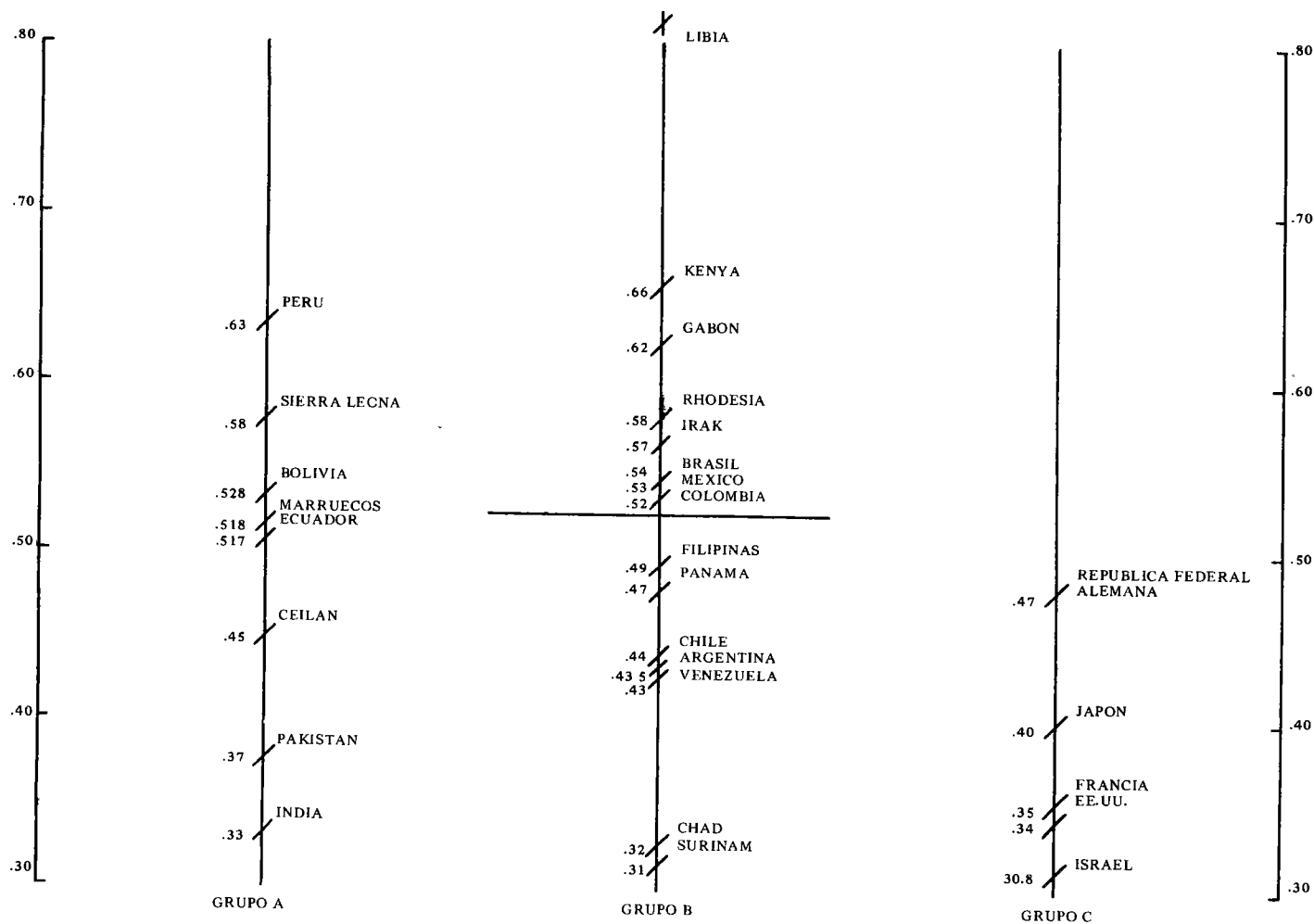
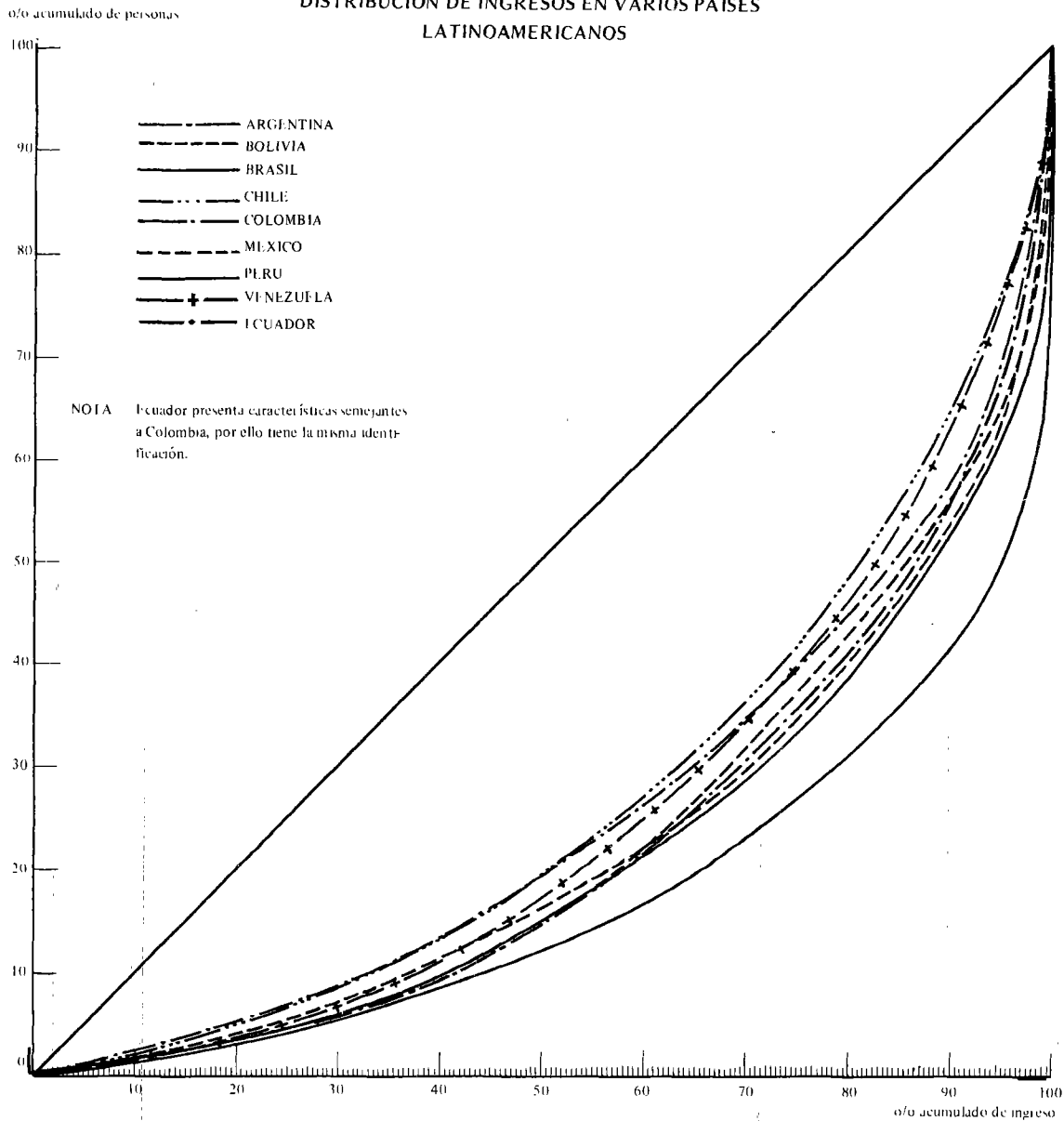


GRAFICO No. 12
GRAFICA LORENZ

DISTRIBUCION DE INGRESOS EN VARIOS PAISES
LATINOAMERICANOS



APENDICE (*)

Se presenta a continuación la demostración matemática de las principales fórmulas y funciones empleadas en el presente "Análisis Económico de la Distribución del Ingreso". No se incluyen las demostraciones de los métodos utilizados sobre estadística matemática los cuales pueden ser consultados en cualquier buen texto que verse sobre la materia.

1 DISTRIBUCION DE PARETO (Ref. Capítulo II)

1.1 DEFINICION: Se dice que una variable aleatoria Y tiene distribución de Pareto si su función de distribución acumulativa es de la forma.

$$F(Y) = \begin{cases} 0 & \text{Si } Y < Y_0 \\ 1 - \frac{K}{Y^\beta} & \text{Si } Y_0 \leq Y < \infty \end{cases} \quad (1)$$

donde tanto β como Y_0 son parámetros positivos.

Para determinar la constante K se aplica la definición de función de distribución con lo cual se tiene que:

$$\Pr \{Y < Y_0\} = 0 = F(Y_0) \quad (2)$$

Por otra parte

$$F(Y_0) = 1 - \frac{K}{Y_0^\beta} \quad (3)$$

Igualando las expresiones (2) y (3) se tiene

$$K = Y_0^\beta \quad (4)$$

La función queda completamente definida si se conocen Y_0 y β que para el caso de las distribuciones consideradas constituyen el ingreso mínimo y el coeficiente de Pareto, respectivamente. La función de distribución es entonces.

$$F(Y) = \begin{cases} 0 & \text{Si } Y < Y_0 \\ 1 - \left(\frac{Y_0}{Y}\right)^\beta & \text{Si } Y_0 \leq Y < \infty \end{cases} \quad (5)$$

La función de densidad de probabilidad, $f(Y)$ es la derivada de la función de distribución $F(Y)$. Por lo tanto:

$$F'(Y) = f(Y) = \begin{cases} 0 & \text{Si } Y < Y_0 \\ 0 + \frac{\beta K}{Y^{\beta+1}} = \frac{\beta (Y_0)^\beta}{Y^{\beta+1}} & \text{Si } Y_0 \leq Y < \infty \end{cases} \quad (6)$$

(*) Preparado por Jairo Arias bajo la dirección del autor.

1.2 MOMENTOS DE LA DISTRIBUCION DE PARETO. Aplicando el concepto de esperanza matemática de una variable aleatoria el momento de orden r de la distribución de Pareto viene dado por:

$$E [Y^r] = \int_{Y_0}^{\infty} Y^r f(Y) dY = \int_{Y_0}^{\infty} Y^r \frac{\beta Y_0^\beta}{Y^{\beta+1}} dY$$

con lo cual

$$E [Y^r] = \beta Y_0 \int_{Y_0}^{\infty} Y^{(r-\beta-1)} dY = \frac{\beta Y_0^r}{\beta - r} \quad (7)$$

Para que el momento de orden r exista es necesario que $\beta > r$

La media o esperanza matemática será entonces:

$$E [Y] = \frac{\beta Y_0}{\beta - 1} \quad (8)$$

La varianza será:

$$\begin{aligned} \text{Var} [Y] &= E [Y^2] - (E [Y])^2 = \frac{\beta Y_0^2}{\beta - 2} - \frac{\beta^2 Y_0^2}{(\beta - 1)^2} \\ \text{Var} [Y] &= \frac{\beta Y_0^2}{(\beta - 2)(\beta - 1)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Se observa que existe límite finito para el ingreso promedio si $\beta > 1$ lo cual corresponde a la primera condición impuesta a la distribución de Pareto. Por otra parte la varianza existe solo si $\beta > 2$.

En la ecuación (5) la función de distribución se expresa como:

$$F(Y) = 1 - Y_0^\beta Y^{-\beta}$$

Donde $F(Y)$ es el porcentaje de unidades receptoras con un ingreso menor o igual al nivel Y . Una expresión análoga a la ecuación (5) es la ecuación.

$$X = \alpha Y^{-\beta}$$

que corresponde a la ecuación (2) del capítulo II, punto 2, donde X es el porcentaje de unidades receptoras con un ingreso mayor o igual al nivel Y , esto es

$$X = 1 - F(Y) \quad y \quad \alpha = Y_0^\beta$$

1.3 ESTIMACION DE LA FUNCION: Para que la función quede perfectamente determinada necesario conocer el parámetro β . Este parámetro puede ser estimado a partir de los datos de una muestra u otra fuente y mediante los métodos de regresión mínimo cuadrática o por el método de los cuartiles. (Cap. II, 2).

2 DISTRIBUCION DE LORENZ (Ref. Capítulo III)

2.1 DEFINICION: La curva de Lorenz relaciona la proporción acumulativa de los ingresos de la comunidad con la proporción acumulativa de las unidades receptoras de ingreso.

Si: $Z =$ Fracción acumulativa de ingreso
 $W =$ Fracción acumulativa de unidades receptoras de ingreso.

La función de Lorenz, cuya relación es de la forma

$$Z = f(W)$$

Puede ser deducida aprovechando las propiedades de la distribución de Pareto como sigue:

a) La fracción acumulativa de unidades receptoras de ingreso con un ingreso menor o igual a un nivel dado de ingreso Y_x se puede expresar como:

$$W_x = P_r [Y \leq Y_x] = \int_{Y_0}^{Y_x} f(Y) dY = \int_{Y_0}^{Y_x} \frac{Y_0^\beta}{Y^{\beta+1}} dY$$

$$W_x = \left. \frac{\beta Y_0^\beta Y^{-\beta}}{-\beta} \right|_{Y_0}^{Y_x} = 1 - \left(\frac{Y_x}{Y_0} \right)^\beta \quad (10)$$

Expresión esta que corresponde a la ecuación (15) (Cap. II, punto 2,b)

b) La fracción acumulativa de ingreso recibido por aquellas unidades receptoras con un nivel de ingreso menor o igual a Y_x es:

$$Z_x = \frac{\int_{Y_0}^{Y_x} Y f(Y) dY}{\int_{Y_0}^{+\infty} Y f(Y) dY} \quad (11)$$

$$Z_x = \frac{\int_{Y_0}^{Y_x} Y \cdot \frac{\beta Y_0^\beta}{Y^{\beta+1}} dY}{\int_{Y_0}^{+\infty} Y \cdot \frac{\beta Y_0^\beta}{Y^{\beta+1}} dY} = \frac{\left. \frac{\beta Y_0^\beta}{1-\beta} Y^{-\beta+1} \right|_{Y_0}^{Y_x}}{\left. \frac{\beta Y_0^\beta}{1-\beta} Y^{-\beta+1} \right|_{Y_0}^{+\infty}} = 1 - \left(\frac{Y_x}{Y_0} \right)^{1-\beta}$$

La relación es válida si $\beta > 1$ (Ver expresión equivalente (16) Capítulo II, punto 2, c).

Si $M = Y_X/Y_0$, el punto de la curva de Lorenz $(Z, W)_X$ que corresponde a un Y_X dado es:

$$Z = 1 - (M)^{1-\beta} \quad \text{y} \quad W = 1 - (M)^{-\beta} \quad (12)$$

De donde :

$$M = (1 - Z)^{1/(1-\beta)} \quad (13)$$

$$M = (1 - W)^{-1/\beta} \quad (14)$$

Igualando (13) y (14):

$$(1 - Z)^{1/(1-\beta)} = (1 - W)^{-1/\beta} \quad (15)$$

De donde se obtiene la curva de Lorenz que expresa a Z en función de W:

$$Z = 1 - (1 - W)^{1-1/\beta} \quad (16)$$

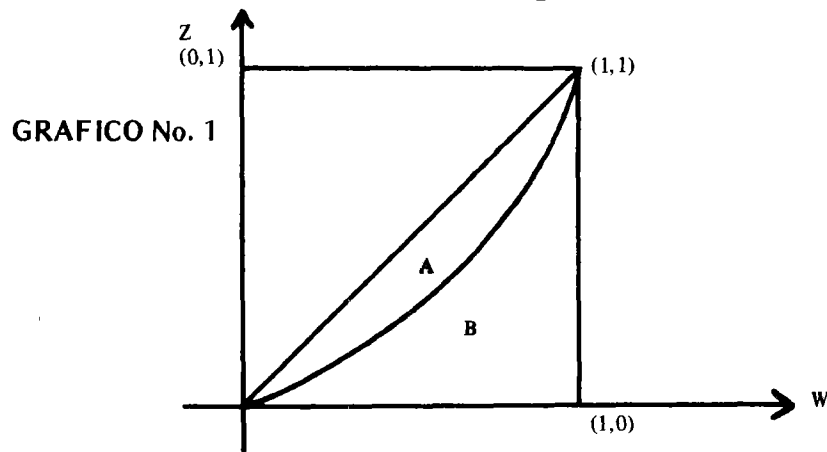
Desde luego al desconocer β se emplea su estimador b.

3. COEFICIENTE DE GINI: (Ref. Capítulo IV)

Partiendo de la representación de la curva de Lorenz (ver gráfico 1 para ilustración), el coeficiente de Gini se define como la relación existente entre el área comprendida entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz con respecto al área encerrada entre la misma línea de equidistribución y los ejes que indican la total desigualdad de ingresos.

Si se llama A al área entre la diagonal y la curva de Lorenz y B al área bajo esta curva (Ver gráfico 1), el coeficiente de Gini viene expresado por:

$$G = \frac{A}{A + B} \quad (17)$$



Como el área del cuadrado (0,0; 0,1; 1,0; 1,1) es igual a la unidad, el área bajo la diagonal es igual a 0.5; o sea $A + B = 0.5$. Por lo tanto el coeficiente de Gini viene dado por:

$$G = \frac{0.5 - B}{0.5} \quad (18)$$

B es entonces el valor de la integral de la curva de Lorenz (Cap III, punto 1, función (23) desde $W_1 = 0.0$ hasta $W_2 = 1.0$; esto es:

$$B = \int_0^1 1 - (1-w)^{1-1/\beta} dw \quad (19)$$

En forma indefinida la integral es.

$$\int 1 - (1-w)^{1-1/\beta} dw = w + \left[\frac{1}{2-1/b} \right] [1-w]^{2-1/\beta} \quad (20)$$

Evaluando esta integral indefinida y considerando a b como estimador de β se tiene:

$$B = 1 - \frac{1}{2-1/b} \quad (21)$$

Reemplazando este valor en (18), se observa que el coeficiente de concentración de Gine es igual a:

$$(28) \quad G = \frac{1}{2b-1} \quad (22) \quad \text{Equivalente a expresión (29) Cap. IV punto 4.}$$

Nótese que si b tiende a infinito G se aproxima a cero mostrando perfecta igualdad en la distribución del ingreso. Pero si b se aproxima a 1, G tiende también a 1 indicando absoluta desigualdad en la distribución del ingreso.

4. DISTRIBUCION LOGARITMICO-NORMAL.

4.1 DEFINICION: Se dice que una variable aleatoria Y tiene distribución log-normal si tiene como función de densidad:

$$f(Y) = \begin{cases} 0 & \text{Si } Y \leq 0 \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\log Y - \mu}{\sigma} \right]^2} & \text{Si } Y > 0 \end{cases} \quad (23)$$

donde μ y σ son parámetros positivos. La integral sobre todo el rango de ingreso es igual a la unidad y la integral desde menos infinito hasta un nivel de ingreso dado Y^* (v.g $\log Y^* = Y^*$) es igual a la probabilidad de que una familia pueda recibir un ingreso menor o igual al nivel Y^* .

Si se hace el cambio de variable

$$Z = \frac{\log Y - \mu}{\sigma} \quad (24)$$

se logra la distribución normal reducida (n(0,1)) lo cual permite utilizar las conocidas tablas de la distribución normal [3] .

4.2 ESTIMACION DE PARAMETROS. Para que la distribución quede perfectamente definida es necesario conocer los parámetros μ y σ los cuales pueden ser estimados a partir de los datos muestrales. Se discuten a continuación dos métodos de estimación.

4.2.1 ESTIMADORES DE MAXIMA VEROSIMILITUD. Si se han tomado n observaciones muestrales Y_1, Y_2, Y_n que provienen de una población con distribución log-normal la función de verosimilitud que corresponde es:

$$f(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\log Y_i - \mu)^2}{\sigma^2}} \quad (25)$$

El logaritmo de la función de verosimilitud será

$$\ln f(x_1, \dots, x_n) = -n \lg \sigma - \frac{n}{2} \lg(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(\log Y_i - \mu)^2}{\sigma^2} \quad (26)$$

Derivando con respecto a μ , el estimador máximo verosímil de μ es

$$\frac{\partial \ln f(Y_1, \dots, Y_n)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (\log Y_i - \mu) = \frac{1}{\sigma} \left(\sum_{i=1}^n \log Y_i - n\mu \right)$$

Igualando a cero para hallar el máximo se tiene que

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Y_i \quad (27)$$

(Equivalente a expresión (36), Cap. VI, punto 3).

Para hallar el estimador máximo verosímil de σ se deriva (26) con respecto a σ , obteniéndose :

$$\frac{\partial \ln f(Y_1, \dots, Y_n)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{(\log Y_i - \mu)^2}{\sigma^3}$$

Igualando a cero y despejando σ se tiene finalmente:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log Y_i - \mu)^2} \quad (28)$$

(Equivalente a expresión (37), Cap. VI punto 3).

En el texto se emplea la expresión:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\log Y_i - \mu)^2 \quad (29)$$

4.2.2 ESTIMADORES POR EL METODO DE LOS CUARTILES. Para este caso se consideran dos cuartiles Q_1 y Q_2 que miden la proporción de unidades perceptoras con un ingreso menor o igual a los niveles Y_1 y Y_2 respectivamente. Para todo cuartil Q : existe un número Z de la distribución normal reducida para el cual la probabilidad de que una variable $n(0.1)$ pueda tomar un valor menor que " Z " es " Q ". Por ejemplo para $Q = 0.25$, el valor de Z es 0.67.

Haciendo uso de la transformación reducida (30) (Ver Cap. VI, punto 3.2,b), con $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ como estimadores de μ y σ respectivamente, para un nivel de ingreso Y_i al cual corresponde un cuartil Q_i se cumple la ecuación:

$$\log Y_i = \hat{\mu} + \hat{\sigma} Z_i \quad (30)$$

Si $Q_i = 0.5$, Z_i sería igual a cero y $\log Y_i = \mu$. Para $Q_i < 0.5$, el segundo término de (30) será negativo con lo cual $\log Y_i < \mu$, etc.

Usando dos cuartiles Q_1 y Q_2 que corresponden a los ingresos Y_1 y Y_2 se tiene:

$$\log Y_1 = \hat{\mu} + \hat{\sigma} Z_1 \quad (31)$$

$$\log Y_2 = \hat{\mu} + \hat{\sigma} Z_2$$

de donde:

$$\hat{\sigma} (Z_1 - Z_2) = \log Y_1 - \log Y_2 \quad (32)$$

y

$$\hat{\sigma} = \frac{\log Y_1 - \log Y_2}{Z_1 - Z_2} \quad (33)$$

Resolviendo el sistema (31) para μ se tiene:

$$2\hat{\mu} = \log Y_1 + \log Y_2 - \hat{\sigma} (Z_1 + Z_2)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2} \left[\log Y_1 + \log Y_2 - \frac{\log Y_1 - \log Y_2}{Z_1 - Z_2} (Z_1 + Z_2) \right]$$

$$\hat{\mu} = \frac{Z_1 \log Y_2 - Z_2 \log Y_1}{Z_1 - Z_2} \quad (34)$$

La combinación de cuartiles con los cuales se obtiene máxima eficiencia en la estimación de μ es: $Q_1 = 0.27$ y $Q_2 = 0.73$.

Conocidos los valores de $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ pueden estimarse los puntos Z_i que corresponden a los porcentajes de unidades receptoras de un ingreso dado. (Ver cap. VI, puntos 3. 2, b y 4).

REFERENCIAS

- A. Naciones Unidas:
"Ingreso Nacional y su distribución en países menos desarrollados."
Series estadísticas, Serie E, No. 3, New York, 1951.
- B. Naciones Unidas:
"Estadísticas de la distribución del ingreso personal".
Consejo Económico y Social, 1957.
- C. Naciones Unidas:
"El Desarrollo Económico de Latinoamérica en el período de la post-guerra New York, 1964."
- D. Naciones Unidas:
CEPAL, *"Economic Survey of Latin América"* 1969, Part Three.
Special Studies E/CN, 12/AC.62/2/Add.2
- E. Agencia Internacional del Desarrollo (AID):
"An Anatomy of Patterns of Income Distribution in Developing nations."
Por Irma Adelman (Northwestern University) y Cynthia Taft Morris (The American University), February 12, 1971.
La parte III contiene además de relevante información por países amplia bibliografía sobre fuentes de información
- F. Economic Bulletin For Latin America.
"Income Distribution in Latin América". Vol. XII, No. 2, Octubre 1967.

REFERENCIAS

- 1 Pareto V.- "Course d'economie politique." Lausanne. 1896.
- 2 Klein, Lawrence R. "Introducción a la Econometría" Edit. Aguilar S.A. 1968.
- 3 Mood y Graybill.- "Introducción a la Estadística Matemática" Edit. Aguilar S.A. 1968.
- 4 Johnston J.- "Econometric Methods", International Student Edition - J.Wiley Edit.- N.Y. 1960.
- 5 Cline William R.- "The Potential Effect of Income Redistribution on Economic Growth in Six Latin American Countries". AID 1969.
- 6 Spiegel Murray.- "Theory and Problems of Statistics" S.P.C.
- 7 DANE "Encuesta de Hogares de Colombia 1970". Edit. Junio 1971.
- 8 Córdova Polibio.- "Distribución de Ingresos en Colombia". Edit. DANE "Boletín Mensual de Estadística No. 237, Abril 1971. pp. 57-95.
- 9 Secretaría General de Planeación de la Junta Nacional de Planificación y Coordinación "Encuesta de Hogares del Area Urbana 1968" Quito, Ecuador 1968.
10. Lorenz M. C.- "Methods of Measuring the Concentration of Wealth". Publicaciones de la American Statistical Association. Vol 9, pp. 209-1.219 Nuevas Series, 1905.
11. Gini Corrado - "On the Measure of Concentration with Especial Reference to Income and Wealth". Cowles Commision, 1936.
12. Bowman, Mary J.- "A. Graphical Analisis of Personal Income Distribution in the United States". American Economic Review. Volumen XXXV, No. 4 1945 páginas 607-628.
13. Durand David.- "A. Simple Method for Estimating the Size Distribution of a Given Aggregate Income", Rev. Econ. Stat. Vol XXV, No. 4 (Nov. 1943), pp. 227-30.
14. J. Durbin and G.S. Watson.- "Testing for Serial Correlation in Least Squeares Regression" Biometrika, Vol. 37, 1950, pp 409-28 y Biometrika, Vol. 38, 1951 pp 159-178.
15. CEPAL. Centro Latinoamericano de Proyecciones Económicas. "Modelos Analíticos para el estudio de la desigualdad en la distribución del ingreso". Borrador para discusión. Julio, 1971.
16. Universidad Católica Instituto de Investigaciones Económicas. Quito, ECUADOR Encuestas de Presupuestos Familiares, 1968. Elaboraciones tesis doctoral Polibio Córdova, Universidad de Michigan.
17. Morgan J.- "Anatomía de la Distribución del Ingreso". DANE No. 237, Abril 1971, Trad. del original publicado en Review of Economics and Statistics, August 1962.
18. Feller, W.- "An Introduction to Probability Theory and its applications". J. Wiley. 1965.
19. Lancaster, H.- "The Chi-squared Distribution" Edit. John Wiley and Sons, New York, 1959.
20. Aitchison, J. y Brown J.A.C.- "The Lognormal Distribution".- Cambridge - Cambridge University Press, 1957.
21. Kuznets, Simon.- "Economic Growth and Income Inequality".- American Economic Review. No. 45. March 1955.
22. Kuznets, Simon.- "Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations: VIII, Distribution of Income by Size".- Economic Development and Cultural Change, II.- January 1963, Part. III.

23. Scitovsky, Tibor. – "A Survey of Some Theories of Income Distribution", publicado en "The Behavior of Income Shares", National Bureau of Economic Research, Studies in Income and Wealth, V. 27. Princeton. Princeton University Press 1964
24. Quandt, R.E. – "Old and New Methods of Estimation and the Pareto Distribution". – Metrika, Vol. 10. Fasc.I. 1966.
25. Tinbergen, J. – "On the Theory of Income Distribution". – Weltwirtschaftliches Archiv 77 (Kiel). Fascículo 2.
26. Brady, Dorothy. – "Measurement and Interpretation of the Income Distribution in the United States". – Income and Wealth Series VI. – International Association for Research in Income and Wealth. Edit. Bowes & Bowes – Londres 1957.
27. Champernowne, D.G. – "The Graduation of Income Distributions" – Econometrica, 20. p. 59. – 1952.
28. Martić, L. – "A. Geometrical Note on New Income Inequality Measures". – Econometrica, Vol 38, P. 936 – 1970.

BIBLIOGRAFIA Y FUENTES DE INFORMACION POR PAISES (*)

1. ARGENTINA (1961)

Naciones Unidas.— *"El Desarrollo Económico y la Distribución de Ingreso en la Argentina"*. — CEPAL, Naciones Unidas, E/CN 12/802, New York, 1969.

2. BOLIVIA (1968)

Secretaría Nacional de Planeación —AID. Trabajo de Rolando Sanz Guerrero.

3. BRASIL (1960)

3.1 Naciones Unidas. CEPAL. *"Economic Survey of Latin America"* 1969, 3a. Parte. [D]

3.2 Fundação IBGE. *"Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios"*. Rfo de Janeiro, 1968.

4. BURMA (1958)

Departamento Central de Estadística y Economía. Gobierno de la Unión de Burma. *"Report on the 1958 Survey of Household Expenditure in Rangoon"*. Series ajustadas sobre la base de estadísticas de Cuentas Nacionales que reflejan la distribución rural de ingresos. [E]

5. CEYLAN (1963)

Encuesta de Finanzas del Consumidor, 1963. — Banco Central de Ceylán, Departamento de Investigaciones Económicas. Colombo, 1964 P. 66. [E]

6. COLOMBIA (1970)

Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE). *"Encuesta Nacional de Hogares"*, 1970.

7. CHAD (1958)

Morrison, Christian, —La Repartition Des Revenus Dans Les Pays Du Tiers—Monde, Editions Cujas, Paris 1969. [E]

8. COSTA DE MARFIL. (1959)

Morrison, Christian. Op. cit.

9. COSTA RICA (1969)

Naciones Unidas, CEPAL. [D]

10. CHILE (1968)

(*) Frente a cada país se indica el año al cual se refieren los datos tomados para el análisis.

- 10.1 Naciones Unidas. – CEPAL *"Economic Survey of Latin America, 1969, Part Three, Special Studies"*.
- 10.2 Dirección de Estadística y Censos. Chile. *"Encuesta Nacional sobre Ingresos Familiares"* 1969.
11. DAHOMEY (1959)
Morrison Christian. Op. cit.
12. ECUADOR (1968)
 - 12.1 Junta de Planificación Encuesta de Hogares del Area Urbana. Quito, Ecuador, 1968.
 - 12.2 Universidad Católica. Instituto de Investigaciones Económicas. Quito. Encuestas de Presupuestos Familiares. Elaboraciones tesis doctoral Polibio Córdova Universidad de Michigan, E.U.A. 1968.
13. EL SALVADOR (1968)
Naciones Unidas. CEPAL. [D]
14. ESPAÑA (1969)
Anuario Estadístico 1970, Cap. VII. Pág. 286.
15. ESTADOS UNIDOS (1969)
 - 15.1 Columbia University. Income Distribution Studies. Prof. Jaffe. 1963.
 - 15.2 Univ. of Michigan. Survey Research Center. Survey of Consumer Finances. 1969.
16. FILIPINAS (1961)
Ordone, Eustaquio O. – *"The Pattern of Post-war Income Distribution in the Phillipines"*. Economic Research Journal, Volume XI, No. 3, Dec. 1964, P. 144. [E]
17. FRANCIA (1968)
Annuaire Statistique de la France, 1969. (Resultats de 1968). Volumen 75, P. 609.
18. GABON (1960)
Morrison, Christian Op. cit.
19. GRECIA (1957)
Crockett, Jean. *"Consumer Expenditures and Incomes in Greece"*. University of Pennsylvania and Center of Planning and Economic Research, Atenas. 1967. [E]
20. INDIA (1956–1957)
P. D. Ojha y V. V. Bhatr. – *"Patterns of Income Distribution in an underdeveloped Economy. A case Study of India"*. American Economic Review, September 1964, P. 714.
21. IRAK (1956)
Morrison, Christian. Op. cit
22. ISRAEL (1957)

Ben-Shahar, Haim and Moshe Sandberg. *"Economic and Institutional Effects of Income Distribution: The case of Israel"*. Public Finance, Vol. XXII, No. 3, 1967, P. 244. [E]

23. JAMAICA (1958)

Ahiram, A.- *"Income Distribution in Jamaica, 1958"*. Social and Economic Studies, Institute of Social and Economic Research. Univ. of the West Indies, Jamaica, Vol. 13, No. 3, Septiembre 1964, P. 337. [E]

24. JAPON (1962)

Ishizaki Tadao. *"The Income Distribution in Japan"*. The Development Economics, Vol. 5, No. 2, Junio 1967, P. 356. [E]

25. KENYA (1961-62)

Estimaciones sobre varias fuentes [E], tales como:

25.1 Naciones Unidas Cuentas Nacionales sobre ingreso de subsistencia y participaciones funcionales.

25.2 Maitra, Priyatosh. *"Implications of Income Distribution for Economic Development: East Africa. A case Study"*. Economic Affairs. Vol. XIII, Nos. 1, 2. Jan-Feb. 1968. P. 87.

25.3 Gobierno de Kenya División de Economía y Estadística. Ministerio de Finanzas y Desarrollo Económico. *"Reported Employment and Earnings in Kenya, 1962"*.

25.4 Morrison, Christian Op. cit.

26. LIBANO (1955-60)

Morrison, Christian. Op. cit.

27. LIBIA (1962)

27.1 Naciones Unidas. *"Yearbook of National Accounts"*. 1968. P. 410.

27.2 Naciones Unidas. *"Compendium of Social Statistics"*, Series K, No. 2, 1963.

27.3 Dajani, Sami W. *"Family Budget Survey in Tripoli Town, 1962"*. Reino Unido de Libia, Ministerio de Economía Nacional. Oficina Central de Estadística. Tripoli. [E]

28. MADAGASCAR (1960)

Morrison, Christian. Op. cit.

29. MEXICO (1963)

29.1 Naciones Unidas CEPAL. [D]

29.2 Banco de México, S.A. *"Encuesta sobre Ingresos y Gastos Familiares en México- 1963"*. Oficina de Estudios sobre Proyecciones Agrícolas. México, 1966.

29.3 Secretaría de Industria y Comercio. Dirección General de Muestreo. *"Ingresos y Egresos de la Población de México. Investigaciones por Muestreo, Julio de 1958"*. México, 1960.

30. MARRUECOS (1965)
Lazrag, Abderrazak. — "*Les Salaries dans le 1955 a 1966*", Bulletin Economique et Social du Maroc, XXIX, 106-107 Juillet-Décembre, 1967. [E]
31. NIGER (1960)
Morrison, Christian. Op. cit.
32. NIGERIA (1959)
Marchal, Jean y Bernard Ducros "*The Distribution of National Income*". St. Martin's Press. New York, 1968. P. 405.
[E]
33. PAKISTAN (1963-64)
Dehjom. "*Personal Income Distribution and Personal Savings in Pakistan, 1963-64*". Pakistan Development Review, Summer, 1967. [E]
34. PANAMA (1969)
Naciones Unidas. CEPAL. [D]
35. PERU (1961)
35.1 Naciones Unidas. CEPAL. [D]
35.2 Ministerio del Trabajo. Servicio del Empleo y Recursos Humanos. Centro de Investigaciones Sociales por Muestreo. CISM. Encuestas por Muestreo. 1967.
35.3 Cha, David. "*Income Distribution, 1961*". Instituto Nacional de Planificación [E]
36. PUERTO RICO (1963)
Columbia University. Income Distribution Studies. Op. cit.
37. REPUBLICA FEDERAL ALEMANA (1969)
Anuario Estadístico de Alemania. 1970. P. 148
38. RHODESIA (1946)
Morrison, Christian. Op. cit
39. SENEGAL (1960)
Morrison, Christian. Op. cit.
40. SIERRA LEONA (1968)
Sierra Leone Household Survey. Africa Research Bulletin. Febrero 1968. P. 917.
41. SUR AFRICA (1965)
41.1 Naciones Unidas Yearbooks of National Accounts.

- 41.2 Naciones Unidas. Yearbooks of Demographic Statistics.
- 41.3 Republic of South Africa. Bureau of Statistics. "Report No. 11-06-03. Survey of Family Expenditure. Ten Principal Urban Areas and the Urban Areas of the Vaal Triangle and the Orange Free State Gold Fields. November, 1966. Family Income". [E]
- 41.4 Feldmann-Laschin, G.R. F.E. Radel and C. De Coning. "Income and Expenditure Patterns of Coloured Household Cape Peninsula". Bureau of Market Research. University of South Africa. Pretoria, 1965. [E]
42. SUDAN (1969)
- República del Sudan. Departamento de Estadística. "Omdurman Household Budget Survey". P. 24. [E]
43. SURINAM (1962)
- Algemeen Bureau Voor de Statistiek. "Surinam in Figures, No. 44". March 1967, P. 3. [E]
44. TANZANIA (1964)
- 44.1 Priyatosh, Maitra. "Implications of Income Distribution for Economic Development: East Africa. A Case Study". PP. 96-97 [E]
- 44.2 Smith, Hadley E. - "Readings on Economic Development and Administration in Tanzania", IPA, Dar Es Salaam, No. 4, Table 1. [E]
45. TRINIDAD Y TOBAGO (1965)
- Miller, Nugent, - "Some Observations on the Income Distribution of Trinidad and Tobago". Income Earnings of Individuals by Sex IN 1-1. Continuous Sample Survey of Population. Publication No. 6, P. IX, P.1 (Urban paid employees). [E]
46. TUNEZ (1971)
- Duwaji Ghazi "Economic Development in Tunisia". Frederick A. Praeger. New York, P. 189. [E]
47. VENEZUELA (1962)
- 47.1 República de Venezuela. Oficina Central de Coordinación y Planificación de la Presidencia de la República. "Primera Encuesta Nacional de Ingresos y Gastos Familiares en Venezuela. Segundo Semestre de 1962". Documento 5. Caracas 1964.
- 47.2 Naciones Unidas. CEPAL. [D]
48. YUGOESLAVIA (1964)
- National Statistics. B. Sefer, Zivotni Standard i Privvedrin rasvoj Yugoelavigi Belgrade, November 1964. National Incomes in Postwar Europe 1967
49. ZAMBIA (1959)
- Baldwin, Robert E. "Economic Development and Export Growth. A Study of Northern Rhodesia. 1920-1960". University of California Press. Berkeley and Los Angeles, 1966. P. 46. [E]