

Trabajo presentado por la Dirección Nacional de Estadística de Colombia al **Octavo Congreso Científico Americano** reunido en Wáshington del 10 al 18 de mayo de 1940

OCTAVO CONGRESO CIENTIFICO AMERICANO

Buenos Aires - - - - - 1889	Washington - - - - - 1915/16
Montevideo - - - - - 1901	Lima - - - - - 1924/25
Rio de Janeiro - - - - - 1905	Mexico - - - - - 1935
Santiago de Chile - - - - 1908	Washington - - - - - 1940

OBJETIVOS DEL CONGRESO

- I - Impulsar el pensamiento y los conocimientos científicos*
- II - Cooperar en la celebracion del quincuagesimo aniversario de la fundacion de la Union Panamericana*

LAS SECCIONES DEL CONGRESO

I - Ciencias Antropologicas	VII - Estadisticas
II - Ciencias Biologicas	VIII - Historia y Geografia
III - Ciencias Geologicas	IX - Derecho Internacional
IV - Agricultura y Conservacion	Derecho Publico y Jurisprudencia
V - Salubridad Publica y Medicina	X - Economia y Sociologia
VI - Ciencias Fisicas y Quimicas	XI - Educacion

PERSONAL DE LA SECCION DE ESTADISTICA

PRESIDENTE

Stuart A Rice

PR IDENTE DEL CONSEJO CENTRAL
DE ESTADISTICA

SECRETARIO

Halbert L Dunn

JEFE DE LA OFICINA DE ESTADISTICA
DEMOGRAFICA DE LA DIRECCION DE CENSO
DEL DEPARTAMENTO DE COMERCIO

VICEPRESIDENTE

Raymond Pearl

PROFESOR DE BIOLOGIA DE LA UNIVERSIDAD
DE JOHNS HOPKINS

VOCAL

George C Haas Isador Lubin C E Mc
Guire Frederick F Stephan Leslie A
Wheeler y Walter F Willcox

CONTENIDO

INTRODUCCION

	P g
ESTUDIO HISTÓRICO-ANALÍTICO DE LA POBLACIÓN COLOMBIANA EN 170 AÑOS	1
GRAFICO GENERAL (LAMINA I) DEL DESARROLLO DE LA POBLACIÓN Y LAS VARIACIONES DE LA SUPERFICIE DEL PAÍS	2A

PRIMERA PARTE

HISTORIA GENERAL DE LOS LEVANTAMIENTOS CENSALES DE COLOMBIA Y DE LOS CAMBIOS HABIDOS EN SU EXTENSIÓN TERRITORIAL DESDE LA ÉPOCA DE LA COLONIA EN EL AÑO DE 1770 SU RELACIÓN CON LOS PRINCIPALES ACONTECIMIENTOS POLÍTICOS DE ESTE PERÍODO	3
---	---

CAPITULO I

Los censos de la poblacion colombiana	3
Apuntes censales de Colombia	3

CAPITULO II

La variacion superficial del territorio al traves de los tiempos	3
--	---

CAPITULO III

Caracteristicas de la estructura censal al traves de determinados periodos historicos	8
---	---

SEGUNDA PARTE

ANÁLISIS MATEMÁTICO APLICADO AL ESTUDIO DEL DESARROLLO DE LA POBLACIÓN HUMANA	24
---	----

CAPITULO IV

Interpretacion analitica del desarrollo de la poblacion humana	24
A) FÓRMULAS EMPÍRICAS	24
La parabola comun o de segundo grado	24
La parabola cubica o de tercer grado	25
La parabola logaritmica	26
Eleccion de los periodos de estudio	28
Calculos preliminares	30
ESTUDIO DE LA PARABOLA COMÚN	31
AJUSTE DE CURVAS POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS	32

CONCLUSIONES

Los datos intercensales	36
Rata del crecimiento anual	37
El error de la poblacion de 1928	38
Extrapolaciones (1939 y 1940) y la futura poblacion de 1948	38
ESTUDIO DE LA PARABOLA CUBICA	39
Rata del crecimiento anual	41
Los datos intercensales y la futura poblacion de 1948	41
Error de la poblacion de 1928	42
ESTUDIO DE LA PARABOLA LOGARITMICA	43
Calculos preliminares	43
Forma de la curva	44
Puntos de maxima y minima	44

	P g
Puntos de inflexion	45
Rata del crecimiento anual	47
Los datos intercensales y la futura poblacion de 1948	47
Conclusiones	48
B) FÓRMULAS DE ORIGEN RACIONAL	50
Punto de maxima y minima	54
Puntos de inflexion	55
CURVA DE DESARROLLO ASIMETRICO	55

CAPITULO V

Estado de la poblacion colombiana segun su posicion en la curva logistica o sigmoidal	58
1 Curvas de la forma general	58
2 Aplicacion a la logistica comun	59
3 Ajuste por el sistema de los minimos cuadrados	59
4 Otros metodos para el ajuste de la curva logistica a mas de tres puntos	60
5 Posibilidad del problema	61
ESTUDIOS DE APLICACION	63
Caso 1	63
Caso 2°	64
Caso 3	65
Caso 4°	66
AJUSTE DE LA LOGÍSTICA POR EL SISTEMA DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS	68
Para el Caso 1	68
Para el Caso 3	70
Para el Caso 4	71
ESTUDIOS DE LA LOGÍSTICA A BASE DE UNA POBLACIÓN INICIAL	73
FÓRMULAS	
a) Estudio de la ecuacion para tres puntos	74
b) Aplicaciones generales	75
c) Estudio de la ecuacion para cuatro puntos	79
APROXIMACIONES SUCESIVAS EN BUSCA DE UNA ECUACIÓN FINAL	81
Primera etapa	81
Segunda etapa	82
Tercera etapa	84
Cuarta etapa	85
CONSIDERACIONES FINALES	87
El error de la poblacion de 1928	89
La rata del crecimiento anual	89
El punto de inflexion	90
CUADRO FINAL QUE MUESTRA EL CRECIMIENTO DE LA POBLACION FUTURA DE COLOMBIA	91

CAPITULO VI

Apendice—Resumen de los datos censales de 1938 con especificacion de departamentos intencencias comisarías municipios sexos estado civil y otras agrupaciones	92
Habitantes de Colombia por edad sexo y estado civil segun censo de 1938	109
Habitantes de Colombia en 1918 y 1938 clasificados por grupos de edad	112
Habitantes de Colombia en 1915 y 1938 clasificados por periodos de vida	112
Distribucion de la poblacion en grupos de edad correspondiente al standard sueco—No incluye 1770 indigenas sin clasificar	112
Distribucion de la poblacion en grupos de edad correspondiente al standard million ingles—No incluye 1770 indigenas sin clasificar	112
Erratas advertidas	113

Anales de Economía y Estadística

SUPLEMENTO AL NUMERO 2º

TOMO III

ABRIL 25 DE 1940

Estudio histórico analítico de la población colombiana en 170 años

J de D Higuera

En esta memoria se hace un estudio de los censos de la población colombiana desde el año de 1770 hasta hoy, para determinar el periodo regular en la historia de su desarrollo normal, que pueda tomarse como básico con el fin de establecer las leyes de su crecimiento numérico y poder así calcular los datos de población interpolada, que sirvan para el establecimiento racional de coeficientes demográficos en los periodos intercensales

Comprende un estudio de los censos de población al través de la historia de los Virreyes, las Presidencias de la Nueva Granada, de la Gran Colombia y de todos los diversos cambios ocurridos hasta nuestros días. Todos estos periodos administrativos han sido acompañados por una serie de cambios en la superficie del territorio, de que dan fe las numerosas cartas históricas consultadas, que nos han servido desde luego, para establecer con alguna precisión mediante aproximaciones planimétricas de medición, el perfil gráfico de este proceso de variaciones superficiales del territorio en los 170 años de historia colombiana que queremos relatar en estos comentarios

Los estudios de interpolación, como ya lo dijimos, permiten el análisis anual de los coeficientes demográficos y nos van a servir para demostrar claramente que el Censo de 1928 tiene un error superior a medio millón de habitantes. Con toda razón este Censo no pudo ser aprobado por el Congreso de Colombia. A base de este mismo procedimiento y una vez determinada la ley del crecimiento numérico de la población, se debe establecer el dato censal calculado para dicho año y considerar la cifra actualmente registrada de 7,851,110 habitantes, sin valor alguno en los cálculos demográficos y en los de interpolación de las leyes que rigen el desarrollo del crecimiento de la población humana

Con un cálculo de extrapolación para el año de 1940, una vez determinada la curva de crecimiento, llegaremos a completar entre

el año de 1770 y este ultimo, el periodo de 170 años a que se refiere el estudio emprendido

El orden sistematico de esta exposicion comprendera, en consecuencia, los siguientes capitulos

PRIMERA PARTE

Capitulo I—Los censos de la poblacion colombiana

Capitulo II—La variacion superficial del territorio al traves de los tiempos

Capitulo III—Caracteristicas de la estructura censal, al traves de de terminados periodos historicos

SEGUNDA PARTE

Capitulo IV—Interpretacion analitica del desarrollo de la poblacion humana

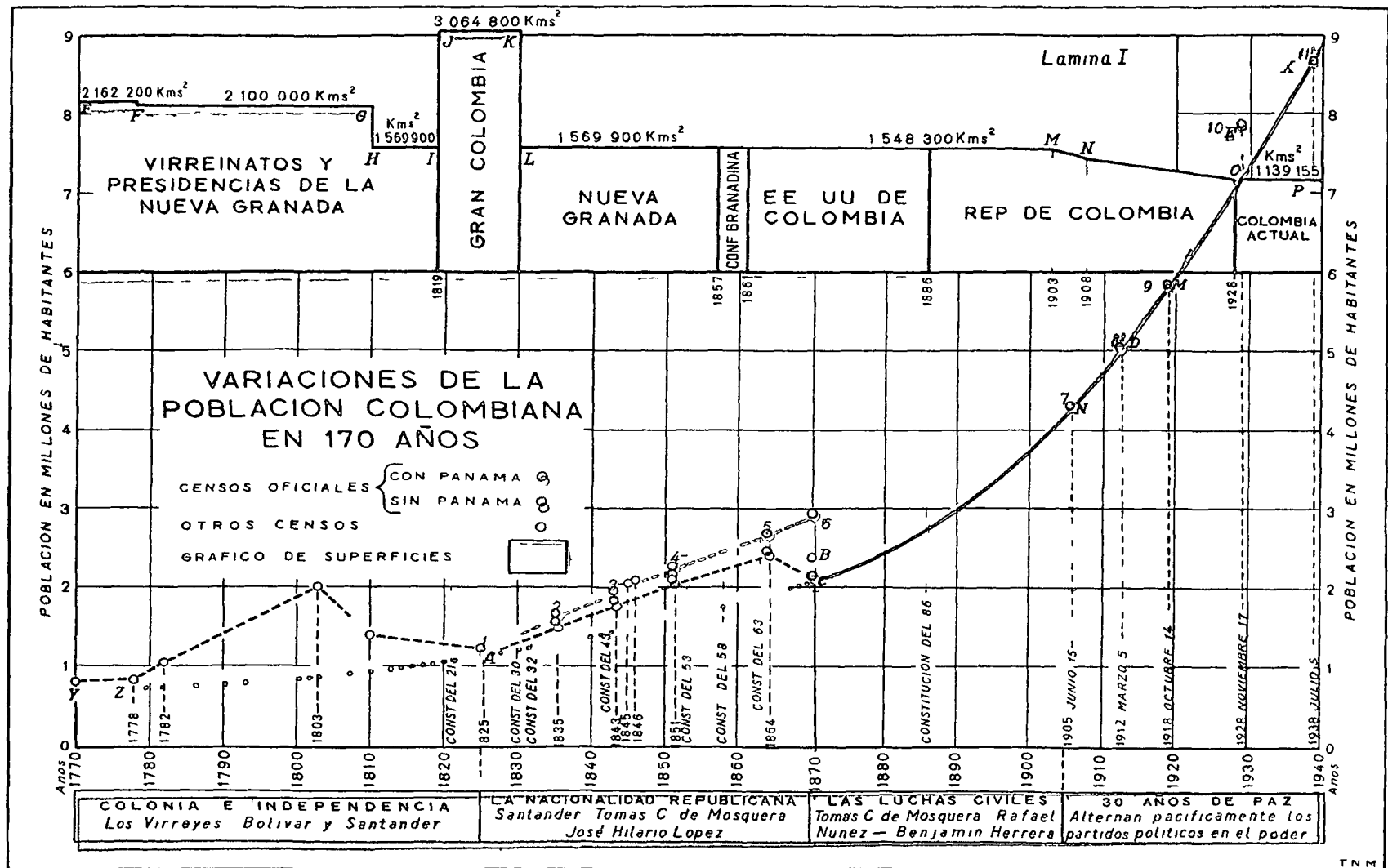
(A)—Formulas empiricas

(B)—Formulas de origen racional

Capitulo V—Estado de la poblacion colombiana, segun su posicion en la curva logistica o sigmoidal

Capitulo VI—Apendice

Resumen de los datos censales de 1938, con especificacion de Departamentos, Intendencias, Comisarias y Municipios, estado civil, sexos y otras agrupaciones



PRIMERA PARTE

Historia general de los levantamientos censales de Colombia y de los cambios habidos en su extension territorial desde la epoca de la Colonia en el ano de 1770 – Su relacion con los principales acontecimientos politicos de este periodo

CAPITULO I

LOS CENSOS DE LA POBLACION COLOMBIANA

De los datos encontrados en los archivos de la Biblioteca Nacional, los consignados en el *Boletin de Historia y Antigüedades* de la Academia Colombiana de Historia, numeros 254-255, y algunos otros dispersos en Anuarios Estadísticos, hemos tomado la informacion censal que se transcribe a continuacion

El primer censo oficial data del año de 1825, en el mes de julio, durante la administracion admirable del General Francisco de Paula Santander, que fijo las primeras bases de la Republica Fue la epoca de la Gran Colombia, la Republica figuro con 1,223,598 habitantes, y su extension superficial alcanzo a la mayor cifra registrada de 3,064,800 kilometros cuadrados Vease el Grafico Lamina I de este estudio, en linea horizontal estan marcados los años y en linea vertical se indica la poblacion en millones de habitantes

El punto A y todos los demas correspondientes al centro de los circulos de fondo verde, corresponden en posicion a los Censos Oficiales Los puntos marcados con circulos de fondo blanco, son tambien datos censales encontrados en Relaciones de Mando de los Virreyes y geografias del pais, apuntes de los historiadores y anuarios estadísticos de Colombia Los circulos de fondo rojo marcan la poblacion de Colombia sin incluir la de Panama (hoy republica independiente) y fueron obtenidos en cada uno de los años marcados, por sustraccion de la poblacion anotada para Panama, en esos cinco años censales, la sustraccion se hizo desde luego, tomando el menor de los datos censales que se indico en cada caso para Colombia (con inclusion de Panama)

Antes de analizar este grafico vamos a transcribir los datos reunidos para su elaboracion, procedentes de las varias fuentes informativas citadas, y con explicacion de las correcciones del caso

Apuntes censales de Colombia

Años	Poblacion	Superficie en kilometros cuadrados	OBSERVACIONES
COLONIA E INDEPENDENCIA			
1770	803 641	2 162 200	Los datos para los años de 1770 1782 y 1803 estan citados por el historiador Plaza como la poblacion correspondiente a esas epocas del Virreinato La de 1782 parece ser la mas probable
1778	898 775	2 100 000	
1782	1 045 641	2 100 000	
1803	2 000 000	2 100 000	
			La poblacion de 1778 aparece en la Geografia de Colombia del General Francisco J. Vergara y Velasco año de 1892 con los datos tomados de la Relacion de Mando del Arzobispo Virrey Don Antonio Caballero y Gongora despues de haber sido ordenados convenientemente y criticados
1810		1 569 900	El General Tomas Cipriano de Mosquera en sus Memorias sobre la Geografia de la Nueva Granada anota para este año 800 000 habitantes y el historiador Restrepo 1 400 000 Por esta razon se han considerado de ningun valor tales informaciones La ultima sin embargo se ha hecho figurar en el Grafico
1825	1 223 598	3 064 800	Julio de 1825 es la fecha del <i>Primer Censo Oficial</i> en la Administracion del General Francisco de Paula Santander

(Continúa)

Apuntes censales de Colombia — (Conclusion)

Anos	Poblacion	Superficie en kilometros cuadrados	OBSERVACIONES
LA NACIONALIDAD REPUBLICANA			
1830	1 686 038	1 569 900	Fecha del <i>Segundo Censo Oficial</i> y primero de la Nueva Granada (Colombia y Panama) fue levantado como el anterior en la Administracion del General Santander. Panama figura con una poblacion de 115 179 habitantes
1843	1 955 264	Desde 1830 hasta 1903 la superficie del país para asuntos censales varia de 1 569 900 a 1 548 300	En la <i>Gaceta Oficial</i> numero 651 del año de 1844 figura esta poblacion correspondiente al <i>Tercer Censo Oficial</i> . Panama aparece con 119 697 habitantes
	1 932 279		Esta otra poblacion de 1 932 279 habitantes y para el mismo año se registra en el <i>Anuario Estadístico</i> de Colombia publicado en 1875 por el doctor Anibal Galindo. Para Panama se anota la misma poblacion anterior. La diferencia entre estos dos censos es muy poca y parece debida a un reajuste critico de los datos hecho por el doctor Galindo corifeo de la juventud revolucionaria de la época y mas tarde gran hombre de estado
1845	2 050 137 2 090 947	Superficie anterior	Tambien se encuentran estos datos en publicaciones oficiales. No se conoce su fuente de procedencia y parecen mas bien datos de interpolacion entre el <i>Tercero</i> y <i>Cuarto Censos Oficiales</i> si se nota su posicion regular en el Grafico de la lamina I (Era Presidente de Colombia el General Tomas Cipriano de Mosquera)
1851	2 243 730	Superficie anterior	<i>Cuarto Censo Oficial</i> publicado en la <i>Gaceta Oficial</i> numero 1335 del año de 1851. <i>Boletín de Historia y Antigüedades</i> de la Academia Colombiana de Historia numeros citados y en el <i>Anuario Estadístico</i> de 1936 se encuentra un dato muy semejante (2 243 034 habitantes)
	2 136 916	Superficie interior	Este dato para el mismo año de 1851 esta publicado en el <i>Anuario Estadístico</i> del doctor Anibal Galindo en el año de 1875. Panama figura con 128 897 habitantes
			La diferencia entre los dos censos transcritos para 1851 es de 106 751 habitantes el autor de la <i>Gaceta Oficial</i> que publica el primer dato da a entender que puede tener una inflacion. Es pues mas probable el segundo dato de poblacion
1864	2 394 487	Superficie anterior	<i>Quinto Censo Oficial</i> —Este dato se encuentra registrado en una Memoria del Secretario del Interior y Relaciones Exteriores al Congreso de 1875. Panama aparece con 221 499 habitantes
LAS LUCHAS CIVILES			
1870	2 951 111	Superficie anterior	<i>Sexto Censo Oficial</i> —Este dato figura publicado en los ultimos <i>Anuarios Estadísticos</i> de Colombia. Para el año de 1871 Anibal Galindo (<i>Anuario Estadístico</i>) da este otro 2 391 984 habitantes. En el Grafico citado está marcado con letra B. Hay varias razones que parecen indicar que este es el dato mas preciso sin embargo en la Biblioteca Nacional volumen 15 047 se encuentran registrados 2 916 703 habitantes. A Panama corresponden 224 032 habitantes
30 AÑOS DE PAZ			
1905	4 113 637 Junio 15	1 548 300	<i>Septimo Censo Oficial</i> —Solo 25 años despues del anterior aparece este Censo y no figura en el la poblacion de Panama. La superficie que aqui se anota es la calculada para 1903. Para los años entre 1903 y 1928 puede considerarse una cifra aproximada entre los datos 1 518 300 kilometros cuadrados y 1 139 551 kilometros cuadrados segun las explicaciones que se daran mas adelante. La segunda poblacion anotada de 4 355 477 habitantes es la mas probable como se explicara a continuacion
	4 355 477	Superficie anterior	
1912	5 072 604 Marzo 5	Superficie entre 1 548 300 kilometros cuadrados y 1 139 551 kilometros cuadrados	<i>Octavo Censo Oficial</i> —Corre publicado en el libro <i>Censo General de la Republica de Colombia</i> presentado al Congreso por el Ministro de Gobierno doctor Pedro Maria Carranco durante la Presidencia del doctor Carlos E. Restrepo
1918	5 855 777 Octubre 14	Superficie anterior	<i>Noveno Censo Oficial</i> —Datos publicados en el <i>Diario Oficial</i> (Marzo 3 de 1923)
1928	7 851 110 Noviembre 17	1 139 155	<i>Decimo Censo Oficial</i> —Figura como censo que se ordeno levantar oficialmente y en tal sentido fue ejecutado. Sus resultados se consideraron visiblemente erroneos y por tal motivo no fue aprobado por el Congreso de Colombia
1938	8 701 816 Julio 5	1 139 155	<i>Undecimo y ultimo Censo Oficial</i> —Levantado el 5 de julio por la Contraloria General de la Republica y de la cual es una dependencia la Direccion Nacional de Estadística. Es indudablemente el mas científicamente planeado y mejor ejecutado en todos sus lineamientos generales. Fue aprobado por el Congreso de 1939 segun Ley 24 de 1939 (20 de noviembre)— <i>Diario Oficial</i> numero 24223 noviembre 20

La cifra de poblacion transcrita para 1905, de 4,143,652 habitantes ha sido tomada del boletin anotado de la Academia Colombiana de Historia, pero consultando el documento original citado como base para ese dato encontramos una gran diferencia, la explicaremos con sus antecedentes, asi

El Secretario de la Direccion General de Estadistica, Rafael Jimenez Triana, rin de un informe al Ministro de Gobierno, doctor Miguel Abadia Mendez, sobre los resultados del Censo de 1905 con fecha febrero 3 de 1917 Corre publicado en el *Diario Oficial* numero 16028 (febrero 24 de 1917)

Los cuadros de poblacion fueron envia

dos con la aprobacion de los Gobernadores, menos los correspondientes al Departamento de Santander (los dos Santandres en esa epoca) Para Santander hubo de tomarse la poblacion de 1896, que fue aprobada por la Ley 28 de 1898 Solo una parte de este Departamento (la que se llamo Departamento de Galan) figura con la poblacion de 1905

No hay datos sobre Amazonas, Putumayo, Caqueta y Vaupes La poblacion de San Andres y Providencia queda incluida en la del Departamento de Bolivar, la de Arauca y Vichada en Tundama, hoy incorporado a Boyaca

Los cuadros presentados se extractan asi

REGIONES	Anos	Habitantes
Antioquia	1905	673 270
Atlantico	1905	101 674
Bolivar	1905	300 129
Boyaca	1905	280 419
Tundama	1905	241 341
		521 760
Caldas	1905	185 786
Cauca	1905	425 516
Cundinamarca	1905	279 649
Ouesada	1905	240 747
Distrito Capital	1905	127 835
		648 231
Huila	1905	143 848
Magdalena	1905	123 548
Narino	1905	255 415
Santander	1895	322 273
Galan	1905	221 257
		543 530
Tolima	1905	220 157
Choco	1905	51 156
Cuajira	1905	75 795
Meta	1905	8 662
		138 613
Total		4 345 477
De acuerdo con datos posteriores podria hacerse un calculo de la poblacion de otras regiones no comprendidas asi		
Amazonas	}	7 000
Caqueta		
Putumayo		
Vaupes		3 000
		10 000
Gran total		4 355 477

En estas condiciones tenemos seguridad de no haber pecado por exceso, en la Estadistica General de la Republica de Colombia, edicion oficial de 1905, por Enrique Arboleda, dice este, en su caracter de Director del Censo, lo siguiente

La poblacion de Colombia en 1905 puede calcularse en 4,900,000 habitantes, Y la de Panama en 350,000

Para Colombia, sin Panama en 4,550,000

En el informe sobre el Censo General de Colombia, en 1912, el Ministro de Gobierno doctor Pedro Maria Carreño, reconoce para Colombia una poblacion de 4,533,777 habitantes

En las cifras anteriores no fue posible transcribir el Censo de Santander para 1905, porque no fue levantado, y se dejo el dato de 1896, con 322,273 habitantes Si se observa que la poblacion de Santander (Santander y Galan antes) solo aumenta desde esa epoca (1905) en 72,200 habitantes, con relacion al Censo de 1938, bien se ve que la region de Santander, con un poco mas de la mitad de la poblacion de Santander hoy, debio de aumentar muy poco, o rebajar si es el caso, ya que su territorio fue el teatro de la sangrienta Guerra de los Mil Dias que cercenó muchas vidas en Santander, mas que en cualquier otra parte de la Republica

Tambien debemos anotar que la poblacion del Amazonas, Caqueta, Putumayo y Vaupes es apenas calculada

Entre todas estas cifras, de origen medianamente incierto, se pueden esperar compensaciones, y en consecuencia, creo que el dato mas ajustado a los informes oficiales que resisten alguna comprobacion, es el antes transcrito de 4 355,477 habitantes

Asi termina esta historia condensada de los censos colombianos

En la lamina I estan interpretados graficamente todos estos valores, con excepcion del Censo de 1810, calculado en 800,000 habitantes, visiblemente errado, y el de 2,916,703 en 1870, tomado en la Biblioteca Nacional, por su semejanza con el valor ya registrado como 6º Censo Oficial en los Anuarios de Estadistica Para 1905 se tomo 4,355,477 habitantes, de acuerdo con las correcciones anotadas

CAPITULO II

LA VARIACION SUPERFICIAL DEL TERRITORIO AL TRAVES DE LOS TIEMPOS

Una vision grafica de este proceso se dibuja en la parte superior de la lamina I Tomando como linea de base la horizontal, que marca la altura de seis millones de habitantes, y trazando ordenadas verticales, proporcionales a la extension superficial del territorio en sus diversas epocas, se obtiene la linea quebrada FF—GHI—JKL—M' N' OP, que marca clara

mente el perfil de estas variaciones, podemos seguirlas al lado de los hechos historicos que las determinaron, en la siguiente narracion

La ciudad de Bogota, capital de la Republica de Colombia, con una poblacion de 330,000 habitantes, fue fundada por el conquistador don Gonzalo Jimenez de Quesada en el año de 1538 Once años mas tarde, en 1549, Carlos V, Rey de España y de las Indias Occidentales y Emperador de Alemania, creo por Real Cedula de 17 de julio la *Audiencia de Santafe* con las Provincias de Santafe, Tunja, Popayan, Cartagena, Santa Marta y Venezuela

Esta Audiencia gobierno hasta 1564, año en que se estableció la primera *Presidencia del Nuevo Reino de Granada* De aqui en adelante se inicia el gobierno civil de Colombia con un extenso e importante territorio El primer Presidente fue don Andres Diaz Venero de Leyva, quien gobernó por diez años y regreso a España Esta Presidencia duro hasta 1717, en que el Rey de España creo el *Virreinato del Nuevo Reino de Granada* El régimen fue muy corto, pues en 1723 fue sustituido por la segunda *Presidencia del Nuevo Reino de Granada*, que duro hasta el año de 1739, en que volvió a crearse el segundo *Virreinato*, por Real Cedula de este ultimo año

El territorio colombiano quedo entonces dividido en once Provincias, asi

Veraguas, Panama, Cartagena, Santa Marta, Riohacha, Maracaibo, Cumana, Guayana, Choco, Antioquia y Popayan

Las anteriores Provincias comprendian los Corregimientos de Casanare Pamplo na, Socorro, Tunja, Mariquita y Neiva , Ademas, por algunos años, la Presidencia de Quito dependio del Virreinato de Santafe En estas condiciones el territorio general del pais alcanzaba a una extension de 2,787,800 kilometros cuadrados, repartidos asi

	Kilometros cuadrados
La Provincia de Maracaibo, con	62,200
Las Provincias de Cumana y Guayana, con	625,600
Las otras Provincias, incluso la Presidencia de Quito, con	2,100,000
Suma	2,787,800

Dentro del conjunto de estas Provincias se incrustaba, por decirlo así, la Capitanía General de Venezuela, un territorio de dominio diferente, con una extensión superficial de 277,000 kilómetros cuadrados, no comprendidos desde luego en la superficie anterior

De modo que el Virreinato de Santafe con la Capitanía General de Venezuela formaba un conjunto con área total de 3,064,800 kilómetros cuadrados. Tal vez ésta sea la razón para que se haga figurar el Virreinato en algunas publicaciones oficiales con área de 3,012,240 kilómetros cuadrados superficie bastante aproximada a la anterior. Pero históricamente, y de acuerdo con esta exposición, en el año de 1770, que se hará figurar más adelante como año censal, la superficie del Virreinato era de 2,162,200 kilómetros cuadrados. En 1777, fecha de la segregación de Maracaibo, esa superficie quedó con 2,100,000 kilómetros cuadrados.

Entre los años de 1731 a 1777 ocurrió la segregación de las Provincias de Cumaná, Guayana y Maracaibo, que se agregaron a la Capitanía General de Venezuela, y ya en estas condiciones el territorio del Virreinato quedó con una extensión superficial aproximada de 2,100,000 kilómetros cuadrados, según se observa en los mapas históricos oficiales de Colombia (edición del Ministerio de Educación Nacional en 1933). El Virreinato constituido de esta manera duró hasta el año 1810, en que se proclamó la independencia de estas Provincias del dominio español. En este último Virreinato se descubren las primeras tentativas para el levantamiento de los censos que correspondieron en gran parte a los territorios colombianos actuales, aunque los historiadores hacen remontar estos intentos censales con datos obtenidos por recuentos directos y sistématicos, hasta el año de 1770.

En efecto, según el historiador Plaza, la población del Virreinato entre los años de 1770 y 1803 varió entre 800,000 habitantes y 2,000,000. Para el año de 1778 el General Francisco J. Vergara y Velasco transcribe en su *Geografía de Colombia*, publicada en 1892, el dato de población con 828,700 habitantes. Este dato fue tomado de la *Relación de Mando*, del Arzobispo Virrey don Antonio Caballero y Góngora. Conviene agregar, además, que el General Tomás Cipriano de Mosquera dio para 1810 una población de 800,000 habitantes

(*Geografía de la Nueva Granada*), y para el mismo año trae el historiador José Manuel Restrepo 1,400,000 habitantes.

Hay, de consiguiente, una anarquía completa en las cifras censales del último Virreinato y varían en un período de 40 años (1770-1810), desde 800,000 hasta 2,000,000 de habitantes. Los datos más probables, de acuerdo con el crédito que merecen las fuentes de información, están entre 800,000 y 1,400,000 habitantes para el período de 40 años anotado, lo que revela un crecimiento aritmético general del 2% anual para la población —o un crecimiento geométrico de 1,5%— aproximadamente. Ambos datos representan números exageradamente altos para que signifiquen el desarrollo de crecimiento de la población en esas épocas, según opinión personalísima del que esto escribe.

El 20 de Julio de 1810 se proclamó la independencia contra España en Santafe de Bogotá. Las Provincias que constituían entonces el territorio del Virreinato no incluían la Presidencia de Quito, y eran

Veraguas, Panamá, Cartagena, Santa Marta, Riohacha, Casanare, Pamplona, Socorro, Tunja, Santafe, Chocó, Antioquia, Mariquita, Neiva y Popayán.

El área de este territorio puede aproximarse en la cifra de 1,569,900 kilómetros cuadrados.

En 1811 se organizó una forma de gobierno con el nombre de *Confederación de las Provincias Unidas de la Nueva Granada*, y en 1813 se declaró la independencia absoluta de España. El Gobierno de España logró volver a establecer su dominio entre los años de 1816 a 1819, año este último en que el triunfo de los independientes fue definitivo y que, así establecida la República con la misma forma de gobierno que ha conservado hasta nuestros días.

El Congreso de Angostura creó la *República de la Gran Colombia* por Ley del 17 de diciembre de 1819, que estaba integrada por los territorios de la Nueva Granada, Quito y Venezuela. En 1821 el Congreso de Cucutá reafirmó la unión de los tres países en una sola República, expidió la primera Constitución de Colombia y eligió Presidente de ella al Libertador Bolívar y Vicepresidente al General Santander.

El territorio de la Gran Colombia, como lo habíamos visto atrás, era ya de 3,064,800 kilómetros cuadrados. La Gran Colombia

se disolvió a raíz de la muerte del Libertador, ocurrida el 17 de diciembre de 1830. Los tres Estados que formaron esta gran República se separaron para formar las Repúblicas actuales de Colombia, Venezuela y Ecuador.

La República de Colombia que, abarcaba antes las Provincias de Panamá y Veraguas, debió regresar a su extensión anterior de 1,569,900 kilómetros cuadrados. Pero entre este año de 1830 y el de 1914—reconocimiento oficial de la separación de Panamá—este último territorio debió variar de extensión, porque parte de lo que antes se tuvo como Provincia de Veraguas fue incorporada a Costa Rica. Por eso la extensión del territorio colombiano en este largo período de 84 años debió corresponder a datos intermedios entre las cifras extremas de 1,569,900 y 1,548,300 kilómetros cuadrados, de acuerdo con las cartas oficiales que venimos comentando.

En el Gráfico de Lámina I, esta última extensión se hace llegar hasta 1903—separación de Panamá—pues para asuntos censales es evidente que los empadronamientos de la población colombiana ya no volvieron a incluir los habitantes de Panamá. Todos los cambios anotados hasta aquí, y los siguientes, se ven gráficamente interpretados en dicha Lámina.

Desde 1903 la superficie de la República ha tenido muchas variaciones, que desde luego no se pueden concretar en números precisos, ya que son el resultado de las diferencias entre Colombia y otros países limítrofes, sujetas a arreglos de los cuales todavía hay algunos pendientes. Cabe anotar, además, que las regiones que se han discutido, arreglado, o que están en arreglo para solución definitiva, son lugares muy despoblados y por lo tanto sin importancia especial para los efectos del presente estudio. Desde 1903 hasta 1928 podemos admitir una variación de la superficie del país dada por las cifras 1,548,300 kilómetros cuadrados y 1,139,155 kilómetros cuadrados. Este último dato es el que suministra como más correcto la Oficina de Longitudes, correspondiente al Ministerio de Relaciones Exteriores. Parece que desde 1928 hasta hoy no ha ocurrido motivo de cambio en esta superficie, que es el último dato oficial de origen conocido.

El Gráfico de Lámina I muestra estos cambios, de manera aproximada naturalmente, pero dentro de la precisión que se

requiere para la elección de las épocas o períodos en que puedan usarse datos censales de población para ser introducidos como elementos de cálculo en el establecimiento de las leyes que rigen el crecimiento numérico y desarrollo de la población, objetivo principal de este estudio.

CAPITULO III

CARACTERISTICAS DE LA ESTRUCTURA CENSAL AL TRAVES DE DETERMINADOS PERIODOS HISTORICOS

El ojo menos experto advierte cuatro épocas perfectamente definidas en la sucesión del proceso censal colombiano con solo fijar la atención en los Gráficos de Lámina I.

LA PRIMERA EPOCA—*Colonia e Independencia*. Abarca un lapso de 55 años, entre 1770 y 1825, que va desde los Virreyes hasta la mitad del período de duración de la primera República, que se llamó la Gran Colombia. Desde luego ninguno de los seis Censos que se anotan en este período, a excepción del último, el de 1825, se levanta con normas oficiales. Se formaron con apuntes aproximados de investigación indirecta unas veces, o fueron simples cálculos ficticios. Se nota gran incertidumbre en los datos fijados, entre 1778 y 1803 sube la tasa de crecimiento en forma anormal, de 1803 a 1810 baja con mayor aceleración aun, y continúa bajando hasta 1825, fin de esta primera época. En asuntos censales y dadas las condiciones aciagas de la organización social y administrativa de esos tiempos, bien puede calificarse esta como la época de la prehistoria censal colombiana.

Los datos recogidos no merecen crédito para un estudio serio. Tal vez los dos primeros y el último, tratan de formar sobre una curva de desarrollo racional la que se indica con puntos rojos en su Sección ZA (Lámina I).

Son figuras destacadas de la época y se confunden con su historia, los Virreyes, Bolívar y Santander.

Es singularmente interesante ver como los hechos históricos de esta época acompañan de brazo, estrechamente las circunstancias que determinaron los datos censales, con esa forma absurda de presentación que hemos descrito.

En efecto

En el año de 1770, aparece la población de la Colonia con 806,611 habitantes, y en 1778 con 828,775. Ambos datos pudieran tomarse como expresiones de la realidad y en tal sentido los admiten los comentaristas

En 1770 era Virrey de la Nueva Granada don Pedro Messia de la Cerda, Marqués de Armijo. Los religiosos de la Compañía de Jesús, cultivadores del estudio en los campos de la actividad científica, debieron crear un ambiente benéfico y propicio al desarrollo de estas investigaciones, y no puede ser otra la razón para que los datos comentados presenten ese carácter de certeza con que enfilan en la serie racional de los hechos advertidos. Pero durante este Virreinato el Rey de España, don Carlos III, ordenó la expulsión de los jesuitas como perturbadores en las posesiones españolas y amenaza para la tranquilidad y el orden social. El Virreinato acogió la medida como política económica, porque eran ellos los más grandes latifundistas de entonces.

Tomando notas de unos interesantes apuntes de mi compañero de labores don Jorge Regueros Peralta, sobre la historia de estas cuatro épocas, los hechos se desarrollaron así:

En el año de 1773 sucedió a don Pedro Messia de la Cerda don Manuel Guirior, Teniente de la Real Armada. Este Virrey hizo levantar un censo de Santa Fe. Luchó con varias tribus indígenas especialmente con las Goajiras, incremento el comercio, los cultivos y los ganados.

En esta época ya pesaban sobre los habitantes del Nuevo Reino de Granada toda una serie de impuestos extorsionadores que empezaban a sembrar la intranquilidad en los colonos.

Al señor Guirior lo sucedió el Virrey don Manuel Antonio Florez Teniente General de la Real Armada. Durante el Gobierno de Florez debió de haberse verificado el Censo de 1778, ya citado, y ocurrió el hecho histórico más destacado de la época de la Colonia, y uno de los más grandes de nuestra historia nacional la Revolución de los Comuneros, iniciada en el Socorro y otros pueblos del actual Departamento de Santander, el 16 de marzo de mil setecientos ochenta y uno (1781). La situación de miseria y explotación del pue-

blo del Virreinato había llegado al colmo, y se habían multiplicado las contribuciones e impuestos para sostener la guerra de España e Inglaterra (1779). Existían impuestos hasta para el aire que se respiraba, y esto no es exagerado ni fantástico, pues llegase incluso a cobrar por el derecho de espacio. A las contribuciones para sostener la Armada de Barlovento, a las de alcabala, a las de almojarifazgo, a las de sisa y a las de diezmos y primicias de la Iglesia, se aunaban, para hacer más oprobioso el cuadro, los monopolios fiscales, como el del tabaco, que dominaban los productos básicos de la Colonia. La figura del Regente Visitador don Juan Francisco Gutiérrez de Piñeres, encargado de hacer efectivas las contribuciones en el interior del Virreinato, pues Florez había trasladado su residencia a Cartagena, fue unánimemente odiada por el pueblo. A todo esto unase la inhumana explotación de los indios y esclavos negros, y en tonces se tiene explicado el gran movimiento revolucionario de los Comuneros.

Merece anotarse, como se desprende de las investigaciones de historiadores conocidos, como don Camilo Forero Reyes, el que los Comuneros fueron hombres dignos de la gratitud de la Patria y no cuadrilla de malhechores, según lo asevera el historiador Groot, y que entre ellos descuella la grande figura de José Antonio Galán, el capitán de los sublevados y el mártir, víctima de la venganza del feudalismo español, mientras es preciso también ver claro como se opacan las figuras de Berbeo y don Salvador Plata, negociantes, timoratos y claudicantes, e incluso traidores al pueblo y al movimiento que los había exaltado. De Galán dice don Camilo Forero Reyes, que a juzgar por sus acciones fue el primer cerebro de nuestro país en donde bulló la idea de la independencia. Manuela Beltrán es celebre por haber sido su planta la primera que hollo en América el escudo y las armas reales de la Corona. La Revolución Comunera terminó con las Capitulaciones de Zipaquirá, juradas sobre los Santos Evangelios por los Comuneros y el Arzobispo Caballero y Góngora. Este las traicionó luego, y vino la infame condena de Galán y compañeros y la burla total de lo pactado.

Por esta época ocurrió el Censo de 1782, en donde se apuntaban 1 046 641 habitantes, y tanto este

dato como el del proximo Censo ejecutado en 1803, con 2 000,000 muestra una clara tendencia de los Virreyes a inflar la poblacion a medida que van descartando los elementos culturales de control y aumentando las pasiones desmedidas de ambicion y mundo y sojuzgamiento

Al Virrey Florez, removido al Virreinato de Mexico, le sucedio don Juan de Torresal Diaz Pimienta, quien solo goberno por espacio de dias, pues lo sorprendio la muerte

A Diaz sucedio el Arzobispo Caballero y Gongora En su *Relacion de Mando* se refiere a un Censo del Virreinato, apuntando las dificultades habidas por falta de vias de comunicacion, y hace alcanzar la poblacion a 1,492,680 habitantes

El Arzobispo Virrey creo, siempre temeroso de la sombra de los Comuneros, un ejercito que en aquel entonces pasaba de 9,000 hombres Durante el Gobierno del Arzobispo Virrey tuvo realizacion un hecho notable, la Expedicion Botanica de Jose Celestino Mutis, el sabio

En el año de 1789 estallo en Europa la Revolucion Francesa y vino al mando, para continuar la sucesion de los Virreyes, don Francisco Gil y Lemos, gobernante opaco y sin trascendencia

Llega luego don Jose de Ezpeleta y Galdeano, de la Orden de San Juan de Malta y Mariscal de Campo, quien habia ejercido con lucimiento el Gobierno de Cuba Hizo en la Nueva Granada un gobierno progresista, y la Colonia adelanto sin duda alguna Ezpeleta fue amante de las letras y de las artes, y en su epoca se abrieron las escuelas primarias en los barrios de Santafe, y esto se extendio a los principales pueblos Y fue entonces cuando don Manuel del Socorro Rodriguez fundo y dirigio el primer periodico importante de estas tierras el *Papel Periodico de la ciudad de Santa Fe de Bogota*

Para entonces surgieron en Bogota las primeras sociedades o circulos literarios Fue celebre el que se reunia en la casa de doña Manuela Santamaria de Manrique, en el cual se destacaron Antonio Nariño, Custodio Garcia Rovira, Camilo Torres, Jose Fernandez Madrid y otros

Luego en la casa de don Antonio Nariño, comenzo a reunirse un grupo selec-

to, integrado por los ya citados y otros hombres ilustres de aquel tiempo, como don Pedro Fermin de Vargas, medico naturalista, politico y escritor distinguido, don Jorge Tadeo Lozano, don Francisco Jose de Caldas y don Francisco Antonio Zea Alli se leia la prensa europea especialmente la francesa y los libros de aquel pais Naturalmente los filosofos enciclopedistas de Francia ejercieron determinante y decisiva influencia sobre la sensibilidad e inteligencia de aquellos hombres Asi se hicieron conspiradores ellos, en lucha por la libertad de su tierra y por la justicia social Lo ultimo se prueba suficientemente con la edicion clandestina que hiciera Nariño de la *Declaracion de los Derechos del Hombre y del Ciudadano*

Como conspiradores, acusados de sedicion y reparto de literatura subversiva, fueron encarcelados Zea, Ignacio Sandino, Pedro Pradilla y Jose Ayala, y los estudiantes Sinforoso Mutis, Jose Maria Cabal, Enrique Umaña, Pablo Uribe y Jose Maria Duran A este, que era natural del Socorro, se le atormento barbaramente para obtener alguna confesion, pero fue en vano German Arciniegas en su *Estudiante de la Mesa Redonda* exalta justiciaramente la figura de Duran Don Antonio Nariño fue enviado a los presidios de Cadiz (España)

En diciembre de 1796 termina su Gobierno don Jose de Ezpeleta e inicia el suyo el Virrey don Pedro de Mendinueta y Muzquiz, Teniente General de los Ejercitos Caballero de Santiago y Gran Cruz de Carlos III Atendio las obras publicas este Virrey, especialmente el camino del Carare, para evitar asi los riesgos de la navegacion del rio Magdalena

Durante el Gobierno de Mendinueta visitaron el Virreinato los ilustres sabios Humboldt y Bonpland (1801) Sus trabajos cientificos y sus actuaciones son muy conocidos

En el Gobierno de Mendinueta hay una paz relativa impuesta a los pueblos por la reaccion del Gobierno Virreinal contra Nariño y compañeros, pero naturalmente continua latente el mal de fondo

Don Antonio Nariño se fugo de Cadiz, vivio un tiempo clandestinamente en Madrid, estudiando, segun el mismo lo relata, las experiencias de la Revolucion Francesa, fue luego a Londres donde le prometieron ayuda para la independencia

a trueque de entregar la Nueva Granada a Inglaterra, proposicion que erguidamente rechazo y luego vino al pais, entrando por el Lago de Maracaibo y atravesando de incognito por tierras de Santander y Boyaca hasta arribar ocultamente a Bogota el 5 de abril de 1797 Continuo su campaña revolucionaria, pero acosado se presento al Virrey Mendinueta y permanecio preso en el Cuartel de Caballeria de Santa Fe hasta que en 1803, debido a su mala salud, fue trasladado con fianza a una casa de campo, siempre en calidad de detenido Murio mas tarde en Villa de Leiva

En las agitadosimas condiciones sociales y politicas de este año de 1803, se realizo el Cuarto Censo de la Colonia, que registró una poblacion, visiblemente errada, de 2 000 000 de habitantes Asi se acusa un crecimiento geometrico general del 3% con relacion al Censo anterior, tambien errado por exceso, crecimiento de poblacion superior en un 50% del que pudieramos considerar como admisible apenas en nuestros dias Cuarenta años mas tarde, en 1843, se realizó el Tercer Censo Oficial y los datos obtenidos apenas pasan en poco de 1,950,000 habitantes, con todo y ser posible que todavia pequen por exceso No sobra agregar que en este año Censal de 1803 termino el Gobierno de Mendinueta y se posesionó del Virreinato Don Antonio Amar y Borbon sin mayor brillo personal, pero cuyo nombre queda en la historia ligado a las luchas libertadoras de nuestros pueblos Termina el hundimiento de una epoca y empieza el nacimiento de otra nueva, que se define siete años mas tarde, el 20 de Julio de 1810, proclamacion solemne de la Independencia de Colombia

En 1808 España es invadida por Napoleon, quien hace Rey a su hermano Jose, el pueblo lo destrona para colocar en su lugar la tragica figura de Fernando VII Las agitaciones revolucionarias de America crecen al amparo de todos estos acontecimientos

El 10 de agosto de 1809 Quito, Luz de America, da el primer grito de Independencia, y don Camilo Torres publica en

las postrimerias del mismo año su celebre *Memorial de Agravios*, que circulo profusamente

El año de 1810 es el ultimo año censal de la Colonia, los datos allegados no pueden ser mas disparatados Mientras el General Tomas Cipriano de Mosquera en sus Memorias sobre Nueva Granada anota la cifra de 800,000 habitantes, el historiador Restrepo trae 1,400,000 El descenso de este ultimo dato con respecto al anterior de 2,000 000 de habitantes, es sencillamente imposible, dado que no existio una enorme catastrofe humana, como causa de tal anormalidad

En este año de 1810 llega a Santafe un Comisionado Regio, don Antonio Villavicencio, cuando ya la indignacion y el sufrimiento populares habian rebasado los limites, y el 20 de Julio comienza la Independencia

De 1810 a 1815 son vertiginosos y variadissimos los hechos politicos, mezclados al trajin de las batallas Es el periodo historico conocido con el nombre de *Patria Boba*, por los pasos timidos y a veces equivocados de la Republica niña Pero ya alli se graban en la gratitud y en los fastos patrios las figuras de los Libertadores y Precursores, porque hay una Republica que recoge y defiende sus glorias y merecimientos

Seria prolijo enumerar la gesta bolivariana, la accion del Pacificador Morillo, el famoso Decreto de Trujillo dictado por Bolivar (la guerra a muerte), el sitio de Cartagena, los martires sacrificados etc

El 7 de agosto de 1819 Bolivar y Santander sellaron nuestra independencia en la batalla de Boyaca

El 6 de mayo de 1821 se instalo en la ciudad de Cucuta el historico Congreso que basado en la Ley Constitutiva de Angostua, creo un estatuto constitucional para el nuevo Estado, formado por la Nueva Granada y Venezuela Bolivar fue elegido Presidente de la Republica y Santander Vicepresidente

El 28 de noviembre de 1821 Panama proclamo su independencia de España, aprovechando la gobernacion de un conterraneo, el Coronel Jose Fabrega, y en el Acta de la Independencia se dispuso que las Provincias de Panama y Veraguas, que integraban el Istmo, formasen parte de

Colombia Por ultimo, el 24 de mayo de 1822, ocurre la batalla de Pichincha y la libertad del Ecuador, el cual se incorpora a Colombia. Así queda de hecho formado el Estado que en la historia se conoce con el nombre de Gran Colombia. Debe advertirse que la Provincia de Guayaquil, por intermedio de un partido que desde el Sur fomentara el General San Martín, pretendió hacerse república o anexarse al Perú, pero Bolívar evitó tal hecho.

El periodo histórico de la Gran Colombia es un periodo agitado, pero especialmente una etapa de formación y estructuración de los pueblos que integran su nacionalidad. Durante ese lapso se destaca la figura de Santander como constructor y organizador. Se trazan planes educativos, se organizan las rentas nacionales, se dictan disposiciones en desarrollo de la industria, etc., y se hacen estudios para unir los dos Océanos, Atlántico y Pacífico, por el Istmo de Panamá, por medio de un ferrocarril o de un canal. Santander escribía sobre esto cartas a Bolívar manifestando la idea de que fuese una asociación colombiana la que tome a su cargo el negocio, y no una sociedad extranjera.

La libertad del Perú y la libertad y formación de Bolivia ocurrieron en el periodo de la Gran Colombia.

Llega el año de 1825 último de esta época que hemos denominado Colonia e Independencia, y bajo el Gobierno del General Santander se verifica el PRIMERO CENSO OFICIAL DE LA REPÚBLICA. La cifra moderada de 1 223,598 habitantes para esta época, se combina con las de los primeros censos de la Colonia en los años 1770 y 1778, formando un conjunto armónico, base de una ley censal que pudiera interpretar el desarrollo de la población humana hasta nuestros días. La curva Z A C N D M X de Lamina I es una expresión gráfica de este hecho.

Y así hemos terminado la historia sintética de esta primera época censal, en donde el ambiente cultural de 1770 y la administración admirable del Hombre de las Leves forman el basamento y la corona de la estructura censal de la Colonia.

LA SEGUNDA ÉPOCA -- Corre de 1825 a 1870 en un periodo de 45 años, que con el de la

PRIMERA ÉPOCA, completa el primer siglo de historia censal.

Esta caracteriza la época por una lucha de ideas para construir *La Nacionalidad Republicana*. Es la primera etapa de los Censos Oficiales, como fácilmente puede advertirse en el gráfico citado, y el periodo en que se agrupan más estrechamente siete de las ocho principales Constituciones republicanas expedidas hasta hoy: la Constitución del año 21 (1821) y las de los años 30, 32, 43, 53, 58 y 63, si se hace caso omiso de los incipientes estatutos constitucionales de los años 1811 y 1812. Nacen y se perfilan los partidos políticos del presente y luchan por el predominio de sus ideales, sin cruzar todavía sus aceros en la forma trágica y violenta de la época que ha de seguir.

Dominan el escenario político de estos tiempos Santander, Mariano Ospina, lo mas Cipriano de Mosquera, José María Obando y José Hilario López, pero fue ron alma de la nacionalidad en forma inconfundible *Santander, Tomás C. de Mosquera y José Hilario López*.

Si comparamos los seis Censos Oficiales de esta época (círculos de fondo verde) con los cinco de la anterior, observamos inmediatamente los siguientes hechos:

a) La superficie del territorio, que en la primera época cambia cuatro veces, en la segunda permanece sensiblemente constante en casi todo el tiempo.

b) La poligonal sinuosa de la época anterior, que une los datos censales, es ahora sensiblemente una línea recta.

c) Los centros de círculos de fondo rojo, que representan datos de población, sin incluir la de Panamá, obtenidos por resta del menor dato censal en cada año, no muestran la uniformidad requerida por los términos de la serie que deben representar.

d) Los puntos A y C deben corresponder a condiciones racionales del fenómeno: el punto A ya estaba aceptado como tal, en cuanto al punto C, trataremos de demostrarlo más adelante.

e) Parece que en toda esta época se hubieran hecho levantamientos censales con la mira de ajustarlos a una rata constante de aumento en la población. Obsérvese al menos lo que ocurre con los datos extremos

	Habitantes
1870	2,951,111
1825	1,223,598

Diferencia en 45 años, 1,727,513 habitantes

Y si calculamos con estos datos el crecimiento, hallamos un aumento constante anual del 3 por 100 aproximadamente, sobre el Censo de 1825, que reproduce casi exactamente los Censos intermedios al ser aplicado en forma aritmética acumulativa

Pero el *sexto Censo Oficial* citado, con 2,951,111 habitantes, lo presenta el estadístico Aníbal Galindo con la cifra de 2,391,984 habitantes después de criticar y corregir convenientemente los datos encontrados en diversas fuentes oficiales

Este último dato censal rebajado de la población de Panamá, da el punto C del gráfico. Este punto vuelve a pertenecer a la curva de trazado continuo ZAC marcada con puntos rojos

f) El punto básico A y el punto C obtenido con los datos del doctor Galindo en sus correcciones, dan idea de que toda la estructura censal formada con los últimos cinco Censos Oficiales de esta segunda época, que aparecen sobre la curva AC , carece de valor. Y eso confirma la idea de que aun habiéndose hecho a base de investigaciones aproximadas, los ajustaban a una ley censal en línea recta

Las épocas censales de este período que darón encajadas entre los principales sucesos históricos, como sigue

El período de historia colombiana comprendido entre los años de 1825 a 1870 se perfila como etapa de estructuración y formación de la nacionalidad republicana

Hechos sobresalientes ocurrieron en esta época y forman ellos la parte más gloriosa y trascendental de la historia patria, son la verdadera base sobre la cual se asienta el edificio de la república democrática. Los principales de ellos son los siguientes

En 1826 se rebeló el General José Antonio Páez, venezolano, contra el Gobierno de Bogotá. Así se inician las disensiones internas que culminan más tarde, en 1830, en la disolución de la Gran Colombia

El 9 de abril de 1828 se instaló la Convención de Ocaña, en esta ciudad santandereana. La pugna política adquirió allí graves caracteres, entre los diversos grupos, el uno, partidario de las ideas avanzadas sostenidas por el General Santander, y bolívarianos los del otro. Así se expresaron, aunque rudimentariamente, los germenés de los actuales partidos políti-

cos tradicionales de Colombia. Los partidarios de Bolívar fueron apellidados *serviles* y los de Santander *liberales*. Estas denominaciones, según el historiador Henao, variaron con el correr de los tiempos, la de *liberal*, en *radical*, *golgota*, y la de *servil*, en *fanático*, *beato*, *godo*, *conservador*. En la famosa Convención de Ocaña triunfaron las tesis de los partidarios de Santander

Sucede también, como grande acontecimiento histórico, la conspiración del 25 de septiembre de 1828 contra la dictadura del Libertador, hecho muy conocido. Tomaron parte en ella valiosísimos elementos de la juventud como Luis Vargas Tejada, gran figura de las letras y de la política nacional, y algunos que más tarde se distinguieron por su conservatismo acendrado y reaccionario. Tal don Mariano Ospina Rodríguez, más tarde Presidente de la República y padre del segundo Presidente Ospina (Pedro Nel, año de 1922)

En los meses finales de 1828 el Perú provocó la primera guerra contra Colombia e invade su territorio. Pero en el Puente de Tarqui el Mariscal Sucre lo derrotó totalmente

El 1° de septiembre de 1829 ocurre un grande acontecimiento de nuestra historia: el General José María Córdoba, el héroe de Ayacucho, se insurrecciona en Antioquia contra el Gobierno de Bolívar y forma un ejército popular del que se titula Comandante en Jefe del Ejército de la Libertad. Derrotado en Santuario (Antioquia) fue villanamente asesinado

El 20 de enero de 1830 se instala en Bogotá el que fue apellidado Congreso Admirable. Ya entonces comienza el declive de Bolívar. Se dicta una nueva Constitución y asume la Presidencia de la República don Joaquín Caicedo

En 1830 ocurren hechos notables: la muerte de Bolívar en Santa Marta, la Presidencia de don Joaquín Mosquera, hermano del Gran General, la disolución de la Gran Colombia y la dictadura del General Úrdaneta

El 20 de octubre de 1831, restablecida la normalidad, se reúne en Bogotá la Convención Nacional, la cual tras rehabilitar política y militarmente a los Generales Francisco de Paula Santander y José Páez, el gran fusilado de 1828, crea el nuevo Estado político y senta sus bases orgánicas. El país se llama entonces Nue-

va Granada Santander fue Presidente Su grande obra, especialmente organiza dora, seria motivo de muchas paginas para analizarla A el se debe ese gran sentimiento democratico que vive en nues tro pueblo y que es indestructible Los historiadores modernos concuerdan en la apreciacion justiciera historicamente, de señalar a Francisco de Paula Santander y a Tomas Cipriano de Mosquera como los forjadores y mas recios arquitectos de lo que hoy es el libre pais colombiano

En 1832 se dicto otra Constitucion que creo la Nueva Granada

Llega despues el año de 1835, y de acuerdo con las costumbres uni versales del censo decenal, se orde na el Segundo Censo Oficial que se levanto durante la administracion de Santander, como el anterior Es, ademas, este el Primer Censo de la Nueva Granada Panama figura con 115,179 habitantes y toda la Nueva Granada con 1,686,038 ha bitantes Tanto este Censo como los que siguen fueron mas bien calcu lados que levantados, o cada levan tamiento hubo de acomodarse a un crecimiento definido del 3% como se dijo antes -dato muy en boga por esos tiempos como representa tivo del crecimiento de la poblacion Ya no es la inflacion de los Virre yes la que falsea los datos, pero probablemente si, la agitacion po litica, que no daba tiempo sino a llevar cuentas a la ligera del pro bable valor de la poblacion

El año de 1837 llega al poder el doc tor Jose Ignacio de Marquez, merced a alianza de un grupo de liberales apelli dados moderados con los grupos reac cionarios Asi fue derrotado el candidato de los liberales radicales, doctor Vicente Azuero

Contra Marquez, uno de los padres del conservatismo, se alzo en armas en el Cauca el General Jose Maria Obando, ga llardisima figura de la epoca Esta revo lucion fue debelada El 6 de mayo de 1840 muere el General Santander

En 1843 una nueva Constitucion refor ma completamente la de 1832

Viene despues la primera Presidencia del General Mosquera Los partidos poli ticos liberal y conservador estaban mas

definidos, Mosquera vino al poder como representante del ultimo, y asi empezo aquella carrera brillante que debia fati gar durante cincuenta años la vida pu blica de Colombia

Entre este acontecimiento singular y el siguiente en 1849 y no menos destacado, la Presidencia del primer Lopez, figuran los tres datos censales que comentamos a continuacion, y dan la clave para formar juicio sobre características censales de la epoca

En este tercer decenio de los Cen sos Oficiales (1835-1846) figuran tres Censos en vez de uno Los grandes y trascendentales sucesos politicos que los anteceden y los siguen parecen haber trastornado la conciencia censal, y puestola a divagar, con tendencia definida de obrar certeramente sobre la posible masa de la representacion popular, aun en el caso mas desfavorable, cuando se calculan los individuos con coeficientes de crecimiento por lo alto, en vez de contarse, opera cion esta ultima imposible de rea lizarse dentro de las nobles agita ciones politicas del momento, que debian cristalizarse en los princi pios basicos de la nacionalidad re publicana, característica de esta se gunda epoca de los Censos Y asi vemos que para 1843, la Gaceta Oficial numero 661 del año de 1844, trae como Tercer Censo Ofi cial el que aprecia la poblacion en 1,955,264 habitantes En el Anua rio Estadistico publicado en 1875 por el doctor Anibal Galindo, cuyo nacimiento al trajo de la vida pu blica hemos de apuntar oportuna mente, se registra un dato muy pa recido 1,932,279 habitantes Pana ma alcanzaba en esta epoca a unos 120,000 habitantes Pero no solo se registran dos Censos distintos en el mismo año, por dos fuentes auto rizadas, sino que para los años si guientes de 1845 y 1846 tambien se citan datos censales en otros docu mentos oficiales Pero, maravillase el lector, con cifras cada vez den tro de un rigorismo premeditado de hacer crecer la poblacion a ra zon de unos 42,000 habitantes por año, en promedio Es de todo pun to evidente que no se pudieron or

denar tres Censos oficiales en tres años casi consecutivos. Nótese, además, en el gráfico o lamina citada, como los Censos de los años 45 y 46 resultan incrustados en linea recta con toda precision y arriere pen see entre el 3º y 4º considerados como oficiales. Este fenomeno claramente destacado en la mitad de la epoca que se comenta, en donde no hubo especialmente ningun cambio en la superficie del territorio, nos induce a creer que en toda ella hubo, mas que una conciencia censal de investigacion directa y cerrada, una pluma habil y una imaginacion, mesurada y racional desde luego, al servicio de los desvelos sociales y politicos de sus hombres que necesitaban de estos recuros demograficos para orientacion de los mil planes que se iban encajando en la carrera acelerada de esta lucha de ideas que mas tarde habria de ser lucha de hombres y de pueblos

Estamos en el año de 1846 y la administracion de Mosquera deberia durar tres años mas todavia. Para reemplazar esta primera administracion se suscito en el pais una intensa agitacion electoral en una atmosfera de gran lucha de ideas y de principios politicos. Los conservadores, con mayoria entonces en el Congreso, se dividieron entre dos candidatos: el doctor Rufino Cuervo y el doctor Joaquin Jose Gori; el liberalismo acogio la candidatura del General Jose Hilario Lopez.

Realizadas las elecciones, se encontro que ninguno de los tres candidatos obtuvo la mayoria constitucional requerida, y correspondio al Congreso hacer la eleccion. El entusiasmo popular alrededor del nombre de Jose Hilario Lopez crecio vertiginosamente, en oposicion a la reaccion conservadora, que al unirse quedaba de hecho vencedora, pues como ya lo hemos anotado tenia mayoria en el Congreso que iba a elegir Presidente.

A la sombra de esta contienda politica surgen las primeras asociaciones gremiales de nuestra historia republicana integradas por los artesanos de las ciudades y pueblos, que eran los trabajadores ciudadanos de entonces. En Bogota fue celebre la Sociedad democratica, integrada por artesanos, a los cuales se unieron en su

campana politica pro-Lopez los estudiantes de la Universidad y de los colegios de la ciudad.

Por estos hechos *El Nacional* y algunos otros periodicos titulaban a Lopez el *candidato de los agitadores*.

La posesion presidencial del primer Lopez y los rasgos prominentes de su administracion son paginas de inolvidable recordacion.

En 1850 estallo una revolucion que fue debelada por el Gobierno, vino luego la administracion de Obando, la dictadura efimera de Melo y el gobierno incoloro de Mallarino.

En 1850 los jovenes de las ideas novisimas se instalaron en clubes, inaugurados con asistencia del Presidente Jose Hilario Lopez y de sus Ministros.

Los jovenes del Colegio de San Bartolome y los de la Escuela de Derecho de la Universidad Nacional organizaron en la capital una sociedad que denominaron La Escuela Republicana. Allí se comentaban estudios sobre ideas liberales, temas y principios de la Revolucion Francesa.

En ese grupo figuraron, entre otros, los siguientes jovenes que mas tarde habian de representar un papel importante en la politica del pais: Santiago Perez, Salvador Camacho Roldan, Anibal Galindo, Camilo Antonio Echeverri, Francisco E. Alvarez, Jose Maria Rojas Garrido y Focion Soto.

Con opuestas ideas politicas de partido se fundo otra sociedad. La Filotemica. Formaron en ella Carlos Holguin, Juan Esteban Zamarrá, Fortunato Cabal, Joaquin F. Velez y otros mas, que fueron personajes salientes del futuro.

En el año de 1851 se levanto el Cuarto Censo Oficial de la Republica, con un total de 2 243,064 almas (Anuario Estadístico de 1936). El suplemento a la Gaceta Oficial numero 1335 de dicho año trae una cifra parecida (2 243 730). En el gráfico de Lamina I hemos considerado este ultimo dato como el oficial, y el otro, un poco menor, como dato censal de otra categoria. Asi se interpreta mejor el proceso de crecimiento que por una razon u otra llevan los Censos Oficiales desde 1825 (Biblioteca Nacional, Sala 1ª, volumen numero 14590, pieza 110).

En 1853 se expidió una nueva Constitución de la República

En 1857, merced a la división entre Manuel Murillo Toro y Tomas Cipriano de Mosquera, asciende al poder Mariano Ospina Rodríguez. Se crea entonces la llamada Confederación Granadina, de acuerdo con una nueva Constitución la del año de 1858

Empieza un periodo agitado de luchas partidistas, la reacción toma proporciones no alcanzadas. El Estado de Santander, legalmente constituido, es invadido por tropas centrales, y en la batalla del Oratorio es depuesto y hecho prisionero el doctor Antonio María Pradilla, Presidente del Estado

Estos y otros hechos produjeron la guerra civil de 1860, capitaneada y llevada al triunfo por Tomas Cipriano de Mosquera, quien se apoderó del poder derrocando a Ospina y creando los Estados Unidos de Colombia. En este momento se inicia otra nueva y definida etapa de la historia de Colombia

En el año de 1863 tiene lugar en Rio negro (Antioquia) la mas ilustre Convención habida en Colombia, después de la de Ocaña. Allí se expidió la celebre Constitución del 63, que dio forma federal a la República y consolidó por casi medio siglo el predominio de las ideas llamadas de vanguardia, luego vino una división liberal entre derechas e izquierdas (radicales e independientes), que terminó con la conocida defección de Rafael Nuñez en el año de 1875

Los años de 1864 y 1870 corresponden también a Censos Oficiales (el 5º y el 6º). El Quinto Censo Oficial registro una población de 2,694,487 habitantes. Hay escasísimas referencias de él, apenas una relación del Secretario del Interior y Relaciones Exteriores en su Memoria al Congreso de 1875 (Biblioteca Nacional, Sala 2ª, Volumen número 20427). Algunos datos complementarios que fueron anunciados en la Memoria anterior, no se encuentran en ninguna parte. Todavía subsiste un ambiente turbio alrededor de estos documentos, que permite poner muy en duda su fuente de investigación directa, para calificarlos mas bien de aproximaciones calculadas a base de un crecimiento aritmético de la población

El Sexto Censo Oficial en 1870 dio 2,951,111 habitantes. Así figura en los Anuarios Oficiales. Para el año de 1871 Anibal Galindo publicó 2,391,984, población que creemos haya sido una rectificación del Censo anterior. Tal vez sean este Censo así rectificado y el de 1825, los dos únicos que tengan algún valor en esta época. Sobre los Censos de 1825 a 1864 no existen detalles de Municipios, Cantones, etc., que puedan dar juicio sobre levantamientos directos, así lo dan a entender algunos estudios históricos y especialmente los que publicó el académico Moisés de la Rosa, en los números 254 y 255 del Boletín de Historia y Antigüedades (Bogotá, septiembre y octubre de 1935).

Ya terminado el estudio de estas dos épocas podemos recapitular que solo cuatro Censos de los trece descritos merecen alguna confianza y corresponden por su posición a un desarrollo racional de población, en 100 años. Ellos son

El de 1770 con	806 641 habitantes	- Punto Y
El de 1778 con	828 710 habitantes	- Punto Z
El de 1825 con	1 223 598 habitantes	- Punto A
El de 1870 con	2 167 952 habitantes	- Punto C

Tanto cambio en la superficie del territorio en estos años y tan grandes intervalos censales, tal vez no merezcan el estudio racional de este desarrollo de la población para utilizar datos intercensales de escasisimo interés demográfico. Pero estos cuatro datos deberían ser los únicos que se pudieran presentar como información y como censos de alguna aceptación en estas dos épocas descritas

LA TERCERA EPOCA. Comprende como la siguiente un periodo de 35 años, entre 1870 y 1905, únicos dos años censales de la misma. Es la época de Las Guerras Civiles. Las ideas políticas completamente definidas entraron en un periodo de calma, se aplacó el ardor de las luchas ideológicas, que se truecan a su vez en luchas de hombres. Los Departamentos de Santander y el del Tolima son los dos grandes cementerios del fin de la hecatombe en el año de 1902. En el intermedio de estos 35 años no pudo levantarse ni un solo Censo general de la República. Algunas circunstancias políticas del momento indujeron a los Departamentos o Estados del país a hacerlo parcialmente. Cronológicamente se efectuaron

Censos entre 1875 y 1896, en el Magdalena, Bolivar (incluia Atlantico), Antioquia (incluia a Caldas), Cundinamarca y Santander (Santander y Norte de Santander)

Fueron figuras militantes del periodo, y quedan agrupadas segun sus actuaciones principales, las siguientes

Tomas Cipriano de Mosquera Manuel Murillo Toro	} Predominio de las ideas liberales
Aquileo Parra	} Insurrecciones del partido conservador
Santiago Perez Jose Maria Rojas Garrido	} Lucha interna entre derechas e izquierdas liberales
Rafael Nuñez Miguel Antonio Caro	} Defeccion de Nuñez y Constitucion de 1886
Gabriel Vargas Santos Rafael Uribe Uribe Benjamin Herrera	} La guerra de los mil dias

Son pues figuras prominentes y destacadas del periodo, *Tomas Cipriano de Mosquera, Rafael Nuñez, Rafael Uribe Uribe y Benjamin Herrera*

El periodo historico que va de 1870 a 1905 es un lapso agitado de nuestra vida nacional. Hasta 1885 los Estados Unidos de Colombia viven bajo la administracion liberal, sacudidos unas veces por las insurrecciones del partido conservador, y en los mas de los casos, por la pugna interna entre las derechas e izquierdas del liberalismo, que llego a adquirir gigantescas proporciones, todo lo cual se debia, evidentemente, entre otras causas, al gran romanticismo que contenian los principios de la Constitucion de Rionegro, y que hacian de las entidades federativas Estados casi autonomos, basta recordar que principios idealistas como el libre trafico y comercio de armas, propiciaron las insurrecciones armadas contra el partido de gobierno

Durante la Administracion del doctor Aquileo Parra en 1876 estallo una revolucion conservadora, que fue debelada

La pugna entre liberales dura medio siglo y termina en el año de 1885, cuando Rafael Nuñez entrego el Gobierno a los conservadores, quienes deberian dominar la politica del pais otro medio siglo tambien

El liberalismo se lanzo en este mismo año a otra guerra civil y fue derrotado en la batalla de La Humareda, donde perdio sus mas gallardos caudillos

Hasta esta epoca, y contando desde de 1870, se hicieron levantamientos censales en tres Departamentos (Estados), y fueron aprobados oficialmente, asi

En el Estado del Magdalena en 1875, que registro 121,000 habitantes

En el Estado de Bolivar (Bolivar y el actual Departamento del Atlantico), en 1881, con 323,097 habitantes

En Antioquia (Antioquia y Caldas), en 1883, con 464,887 habitantes

En 1886 fue aprobada la ultima Constitucion colombiana, inspirada por la figura mas reaccionaria de la epoca, don Miguel Antonio Caro

Es en realidad esta la ultima Constitucion expedida en Colombia, vigente hoy con dos reformas importantes la del Acto legislativo numero 3 de 1910, de tendencia Republicana, y la de 1936, netamente Liberal

Llegados a este punto no huelga rememorar en un resumen rapido los estatutos constitucionales que rigieron la historia integral del pais, incluyendo las incipientes realizaciones de 1811 y 1812, asi

1ª La Constitucion de 1811, elaborada por juntas patrioticas. Fue un estatuto de 14 titulos, dentro de los cuales quedaban comprendidas las normas propias del sistema republicano democratico de gobierno. Tuvo, no obstante, muchas confusiones, especialmente en las atribuciones de las distintas entidades gubernamentales que se establecian, y declaraciones ingenuas, como las que se determinaban para obtener la pureza del sufragio, consistia en que despues de una cruzada de admoniciones de los parrocos, se entonara el himno *Veni Creator Spiritus*, etc

2ª La Constitucion de 1812, que fue en realidad una ordenada reforma de la anterior, mas ajustada a las necesidades y realidades de la epoca. Siempre, claro esta, dentro de la democracia y la forma republicana de gobierno. La Constitucion se dictó implorando la asistencia del *Espiritu Santo para obrar con acierto*, y rompio con la enumeracion de los *Derechos del hombre y sus deberes*

Asimismo declaro que no era buen ciudadano quien no fuese buen hijo, buen padre, buen hermano, buen amigo y buen esposo

3ª La Constitución de 1821, que creó la Gran Colombia

4ª La Constitución de 1830, dictada por el Congreso Admirable, corrigió muchas faltas de la anterior

5ª La Constitución de 1832 formó la Nueva Granada, fue muy semejante a la de 1830, pero más claros sus principios

6ª La Constitución de 1843 Al principio se trató de hacer una reforma constitucional, pero luego se creó todo un nuevo estatuto, que fue grandemente combatido en su época

7ª La Constitución de 1853 El liberalismo en el poder con José Hilario López

8ª La Constitución de 1858 creó la Confederación Granadina Retorno del partido conservador al poder con don Mariano Ospina Rodríguez

9ª La Constitución de 1863 (Rionegro) Se forman los Estados Unidos de Colombia Retorna el liberalismo al poder y se crea el federalismo

10ª La Constitución de 1886 El partido conservador vuelve al poder y el país se distingue con el nombre de República de Colombia Los Actos legislativos reformativos de esta Constitución en 1910 y 1936, le imprimen tendencias republicana y liberal, sucesivamente

En febrero de 1888 se interesó el nuevo Gobierno por levantar el Censo de Cundinamarca Fue aprobado oficialmente en ese mismo año con una población de 561,689 habitantes

En 1895 estalla otra revolución liberal que fue derrotada en Enciso (Santander) por el General Rafael Reyes Era Presidente de la República don Miguel Antonio Caro

En 1896 se levanta un Censo de Santander que comprendía tanto al actual Departamento de Santander como al del Norte de Santander Fue aprobado el año siguiente y arrojó una población de 561,117 almas

Todas las luchas anteriores crearon una situación de pobreza y de quiebra incomparesables El país estaba inundado de papel moneda, el crédito por el suelo, los escritores perseguidos, y para completar este cuadro de sombras y desgracias, estalla en 1899 la más sangrienta revolución

liberal, la guerra de los mil días, que terminó con las capitulaciones del Nerlandia y el «Wisconsin El Tratado de Nerlandia fue impuesto al General Rafael Uribe Uribe por el gallardo General conservador Juan B. Tovar, que no quiso cumplir la orden de fusilarlo, vencido, entregado y empeñada su palabra

El General Benjamín Herrera, sin duda alguna el más grande militar liberal de los tiempos de Mosquera, llevó las únicas Banderas no derrotadas de la revolución hasta el Istmo de Panamá, en donde, debido a la intervención yanqui, tuvo que capitular, pero imponiendo un tratado de vencedor, si se tiene en cuenta el estado de cosas de entonces El Tratado del Wisconsin, en 1903, creó las bases de las reformas constitucionales del año 10 y preparó y confirmó la actuación de gobiernos conciliadores, aun anteriores a esa fecha, como el del General Ramón González Valencia

Termina ya prácticamente esta TERCERA EPOCA, que hemos hecho avanzar hasta 1905, fecha en que se reanudan los Censos del país

En los años de 1900 a 1905 ocurrieron hechos que es necesario exponer a la ligera para su conexión con los de la época siguiente, la CUARTA EPOCA de esta exposición Cronológicamente se pueden comentar así

La división conservadora entre nacionalistas e históricos había tomado proporciones excepcionales, y el 31 de julio de 1900, el octogenario Presidente Manuel Ancelmente fue depuesto por un golpe de cuartel y se adueñó del Poder el doctor José Manuel Marroquín, que era Vicepresidente de la República y militaba dentro del bando de los históricos Estos se habían mostrado como feroces opositores a Miguel Antonio Caro y a los nacionalistas dominantes, habían en cierto modo propiciado la revolución y mantenido contacto con algunos jefes rebeldes

El 21 de noviembre de 1902 los Generales Benjamín Herrera y Alfredo Vázquez Cobo firmaron en el buque Almirante de la marina americana, el Wisconsin, surto en la bahía de Panamá, el histórico Tratado de Paz, que puso término a la Guerra de los Mil Días El gesto del General Herrera, victorioso, con un ejército superior al del Gobierno, depositando su espada ante la terminante amenaza de la intervención yanqui, solo es

comparable con el patriótico acto del doctor Jose Vicente Concha, que como Ministro en Washington se nego a solicitar en nombre del Gobierno Colombiano la intervencion americana en el Istmo No obstante el 3 de noviembre de 1903 el imperialismo americano cayo sobre Panama

El 7 de agosto de 1904 tomo posesion de la Presidencia el General Rafael Reyes Su Gobierno desde el punto de vista del progreso material tuvo algun relieve, pero politicamente fue de hecho una resurreccion del nacionalismo Henao y Arrubla en su historia dicen que Reyes era del temperamento de los autocratas, de los dominadores, tenia la audacia y la astucia del General Mosquera, el rebelde de 1860, pero no tenia los talentos ni la ilustracion de el

LA CUARTA EPOCA La Republica de Colombia, despues del ultimo intento de restauracion liberal en la guerra de los Mil Dias, empezo a disfrutar la vida ciudadana de la democracia pacifica, mas o menos bien entendida en un principio pero en ascension creciente de perfeccionamiento, que se fue acentuando al correr de los tiempos iniciados con la llegada del ultimo siglo Contribuyo en mucho a este estado de cosas un hecho notable citado por el General Rafael Uribe Uribe, cuando manifesto paladinamente que, despues de 1903, el Partido Liberal habia resuelto de clararle la paz al partido conservador Si dejamos transcurrir unos pocos sucesos historicos sin mayor trascendencia todavia, hasta 1909 en que se inicio la epoca de las *reformas democratistas* porque se propuso y se consumio la primera reforma del estatuto feudal del 86, tenemos contados precisamente los ciclos solares que nos permiten calificar este interregno magnifico con el nombre de *La Epoca de los 30 Años de Paz*

El periodo total abarca, sin embargo, 35 años, contados desde 1905 a 1940, para comprender los Censos levantados regularmente desde 1905 hasta nuestros dias Todos ellos ordenados bajo normas oficiales, han venido a reanudar en estos ultimos 35 años la costumbre olvidada en los otros pasados 35 años de luchas fratricidas

El titulo de esta epoca se compadece muy de cerca con el siguiente aparte del Mensaje que el actual Jefe del Estado, doctor Eduardo Santos, dirigio al Congreso de 1939, con motivo de su reunion

ordinaria anual, el 20 de Julio, dia de la Patria

Dice asi

30 años de paz Se cumplen ahora 30 años de completa normalidad constitucional en Colombia El 19 de julio de 1909 concluyo, ahogado mas que por la fuerza de las armas por la unanime improbacion nacional, el ultimo brote de revuelta armada de nuestra historia, que no alcanzó a durar ni dos semanas Se restablecio tambien en 1909 el pleno regimen legal que desde entonces no ha sufrido eclipse y ha soportado sin trepidar hasta la prueba crucial de la alternabilidad de los partidos en el poder

«Esos 30 años han sido de intensa actividad politica En verdad no se ha mantenido el orden en medio del silencio y la quietud sino a traves de una agitacion democratica, casi permanente Durante ellos se han verificado mas de cincuenta elecciones populares con todo su cortejo de propaganda libre y de pasiones enardecidas, sobre todas las cuales se ha mantenido incolume una paz que es el mas precioso de nuestros bienes

Creyeron muchos que el pasado debate electoral marcaria una hora tragica para la Republica por el inevitable choque violento de dos fuerzas apasionadamente opuestas Cuatro años hacia que por la voluntaria abstencion del conservatismo, en las elecciones participaba un solo partido, con lo cual habia desaparecido en ellas todo elemento de pugna esencial y de incertidumbre para el final resultado La calma que ello producía en las jornadas del sufragio no compensaba, ni con mucho, el profundo y peligroso desequilibrio producido por el alejamiento de uno de los grandes partidos tradicionales de la actividad electoral y legislativa

Pero todos temian que la reanudacion de la normalidad no se lograra sin las mas dolorosas convulsiones, y era ese el concepto de algunos que parecían bien colocados para hacer pronosticos probables El pais parecia complacerse en desbaratar ideas tan pesimistas y presento un certamen esplendido, para todos motivo de honda satisfaccion

«Os toca a vosotros juzgar que participacion tuvo en ese certamen el actual Gobierno, y como supo cumplir con sus deberes En todos los tonos, a todas las horas y por todos los medios, preconice una honrada neutralidad de las autoridades

en el debate, y me esforce porque ellas dieran garantías imparciales

Estais plenamente capacitados para saber y para decir como fueron cumplidos esos propositos »

En estos 35 años se suceden once Presidentes y se registran cinco levantamientos censales

De los once Presidentes ocho fueron conservadores y los tres ultimos liberales

No sobra hacer un recuento de sus nombres y agruparlos por tendencias, ya que forjaron la fisonomia politica de los tiempos en que vivimos

Conservadores

Rafael Reyes Ramon Gonzalez Valencia	Division interna general del partido entre historicos y nacionalistas
Carlos E Restrepo Jose Vicente Concha	La Union Republicana con liberales y conservadores
Marco Fidel Suarez Jorge Holguin Pedro Nel Ospina Miguel Abadia Mendez	Regresan los republicanos a sus respectivos partidos politicos

Liberales

Enrique Olaya Herrera	Gobierno de concentracion
Alfonso Lopez	Gobierno reformista
Eduardo Santos	Gobierno actual

La alternabilidad pacifica de los partidos en el poder, característica muy destacada de la epoca ocurrio en el gobierno legalista del doctor Miguel Abadia Mendez

En el año de 1905 se reanudaron las actividades censales del país, después de permanecer 35 años nubladas con el humo de la pólvora y ahogadas en la sangre de las batallas. En este año se verificó el Séptimo Censo Oficial, que registro 4355,477 habitantes. Sus resultados por Departamentos, Provincias y Municipios estan publicados en el

Diario Oficial numero 16028 Febrero 24 de 1917. Su posición en el gráfico de Lamina I siguiendo la curva Y Z A C X, es muy aceptable, es decir, el dato muestra gran aproximación como término de una serie censal definida. Huelga advertir que estos datos censales, y los que siguen, ya no incluyen la población de Panamá

Por este año de 1905 el Presidente Reyes intento una dictadura para prolongar se en el poder. En febrero 10 de 1906 ocurrio un atentado personal contra el, del cual salio ileso, y castigo a los responsables con el ultimo asesinato oficial registrado en los anales del país

Los tratados con Estados Unidos y Panamá, sometidos a la consideración de la Asamblea Nacional convocada por Reyes, provocaron honda indignación popular y se formó la Union Republicana entre liberales y conservadores, para luchar contra la dictadura. Así se promovió el histórico motin ciudadano del 13 de marzo de 1909, vino la caída del Dictador y se posesionó de la Presidencia el General Jorge Holguin

Al siguiente día de los hechos realizados, con Bogotá en estado de sitio, Reyes volvió a reasumir el poder. Pero este ya fue un intento efímero de dominio. El 3 de junio abandonó a Bogotá con rumbo a la Costa Atlántica, y desde Gamarra encargo del Gobierno a don Jorge Holguin. Reyes trataba de fugarse y así lo hizo, embarcándose en Santa Marta para Europa

El 3 de agosto de 1909 el Congreso eligió al General Ramón Gonzalez Valencia para el cargo de Presidente de la Republica. Su gobierno fue reformador y progresista, pues entre otras cosas destruyó la obra reaccionaria del Quinquenio de Reyes y convocó la Asamblea Nacional Constituyente, que se reunió en Bogotá el 15 de mayo de 1910, se realizó así la primera y trascendental reforma del Estatuto Feudal de 1886. El 15 de julio de 1910 fue elegido Carlos E. Restrepo Presidente de la Republica. Fue un gobierno de progreso y durante el los elementos que habían formado en las apellidadas toldas republicanas, retornaron de nuevo a los partidos tradicionales

En 1912, marzo 5, se levanto el Octavo Censo Oficial con una población de 5,072,604 habitantes. Su publicación, muy detallada, fue hecha por el Ministro de Gobierno, en un libro titulado Censo de la Republica de Colombia (Biblioteca Nacional, Sala 1ª, volumen 14 492). Ni la presentación de este Censo ni la del anterior tienen todavía los detalles de forma y discriminación que un levantamiento de esta

naturaleza requiere para revelar las diversas características demográficas, sociales y morales de la población Tampoco es justo exigir mas a una Republica que empieza a reponerse de pasados y duraderos quebrantos políticos y sociales

Notese la magnífica posición de este Censo en el Grafico de Lamina I

De 1914 a 1918, época de la Gran Guerra, ejerció el poder el ilustre republicano doctor Jose Vicente Concha, quien tuvo que afrontar la crisis mundial provocada por la hecatombe europea

En 1918, octubre 14, se realizo el Noveno Censo Oficial con una población de 5,855 777 habitantes Esta publicado en el Censo de la Republica de Colombia (Biblioteca Nacional, Sala 3ª volumen 4119), y tambien en el «Diario Oficial» numeros 18813 a 18816 (marzo de 1923) Su publicacion tiene detalles interesantes y es considerado como un buen Censo en cuanto a su exactitud Como el anterior, presenta una posición exenta de anormalidad en el Grafico de Lamina I

En 1919 se posesiono de la Presidencia de la Republica don Marco Fidel Suarez, humilde hijo del pueblo, exaltado a tan alta posición por la democracia Por renuncia de Suarez, en 1921, vino al poder don Jorge Holguin Le sucedio en 1922, el segundo Presidente Ospina (Pedro Nel), en competencia con la candidatura liberal del General Benjamin Herrera

El 7 de agosto de 1926 subio al poder el doctor Miguel Abadia Mendez, gran jurisconsulto y hombre legalista de actuaciones definidas Fue el ultimo Presidente conservador, y cargo con la responsabilidad histórica, que le honra, de entregar constitucionalmente el poder al primer Presidente liberal de estos ultimos tiempos

En 1928 se levanto el Decimo Censo Oficial con una población de 7,851,110 habitantes Este dato es a todas luces erroneo, por inflacion superior a medio millon de habitantes Ni siquiera merecio la aprobación del Congreso Se hizo una publicacion con el nombre de Me

moria y Cuadros del Censo de 1928, con las anotaciones mas peregrinas sobre el aumento de porcentajes caprichosos a los Departamentos para suplir probables deficiencias En calculos demograficos no deberia usarse este dato censal, como lo demostraremos mas adelante, sino la cifra calculada que despues indicaremos Vease su posición anormal en Lamina I Claramente se refleja una situación política de decadencia en el Gobierno, que ya no alcanza a fijar el control de las funciones mas importantes y deberia culminar dos años mas tarde con el cambio total de la orientación política nacional

En las postrimerias del gobierno del doctor Abadia Mendez ocurrieron los hechos precisos que preceden la caída de un partido de gobierno La situación económica de inflación, producida por las millonadas prestadas al extranjero, se venia al suelo con su clamor de quiebras y desgracias de todo orden En diciembre de 1928 los reaccionarios del regimen abaleaban los movimientos obreros en las Zonas bananeras de la Costa Atlantica, y en la capital de la Republica los mas listos alateres del regimen aprovechaban la situación de *rio revuelto* con inteligencia y sagacidad incomparables

El 8 de junio de 1929, ultimo año del gobierno de Abadia Mendez, el liberalismo y el pueblo en general insurgen y provocan en memorables jornadas una modificación sustantiva en los hechos anormales del Gobierno, y es así como aprovechando las circunstancias de bancarrota motivadas por la crisis económica mundial de aquel entonces, Alfonso Lopez lleva al liberalismo al triunfo

En 1930 ocupo la Presidencia el doctor Enrique Olaya Herrera, quien hizo un gobierno de concentración, un gobierno de transición inteligentemente conducido

En 1934 le sucedio el segundo Lopez (Alfonso), como debe llamarsele en recuerdo de las reformas que realizo el General Jose Hilario Lopez en el año de 1849 (El primer Lopez)

El 7 de agosto de 1938 sucedio al Presidente Lopez el doctor Eduardo Santos, actual Mandatario de Colombia por el periodo constitucional que terminará en 1942

El 5 de julio de 1938 se levanto el Undecimo y ultimo Censo Oficial del pais, ya en los finales del gobierno del Presidente Lopez, de modo que a dicho gobierno correspondio todo el tiempo de preparacion, organizacion y ejecucion del trabajo hasta llegar al levantamiento general para la obtencion de los documentos basicos y su recoleccion

El resultado por Departamentos, Intendencias y Comisarias es como sigue

POBLACION DE COLOMBIA
POR DEPARTAMENTOS, INTENDENCIAS
Y COMISARIAS, SEGUN EL CENSO OFICIAL
DEL 5 DE JULIO DE 1938

Departamentos	Habitantes	Totales
Antioquia	1,188,587	
Atlantico	268,409	
Bolivar	765,194	
Bovaca	737,368	
Caldas	769,968	
Cauca	356,040	
Cundinamarca	1,174,607	
Huila	216,676	
Magdalena	342,322	
Nariño	465,868	
Norte de Santander	346,181	
Santander	615,710	
Tolima	547,796	
Valle del Cauca	613,230	
Subtotal		8 407,956
Intendencias		
Amazonas	6,414	
Choco	111,216	
Meta	51,674	
San Andres y Providencia	6 528	
Subtotal		175,832
Comisarias		
Arauca	11,156	
Caqueta	20,914	
Guajira	53,409	
Putumayo	15,688	
Vaupes	7,767	
Vichada	9,094	
Subtotal		118,028
Poblacion total		8,701,816

Llegados a este punto y para terminar lo referente a esta CUARTA Y ULTIMA EPOCA CENSAI, es necesario hacer una relacion de las diversas circunstancias que rodearon el levantamiento censal de 1938, a fin de poner en evidencia la alta calidad de precision que podemos conceder a sus resultados

Correspondio al Contralor General de la Republica, doctor Plinio Mendoza Neira, tomar las primeras iniciativas desde el año de 1935, ya que la Direccion Nacional de Estadistica es una dependencia de la Contraloria General. Desde esa epoca se creo la Oficina de Preparacion del Censo, se allego informacion tecnica y se envio personal al Exterior, a fin de estudiar las organizaciones implantadas en otros paises

En estas nuevas condiciones correspondio al Contralor, doctor Carlos Lleras Restrepo, acometer de lleno el trabajo, hasta llegar a la recoleccion de los datos individuales, se creo en consecuencia el organismo censal, se dictaron reglamentos, se planeo el conjunto sistematizado de la ejecucion ordenada en sus distintas fases y se preparo el plan completo de la elaboracion mecanica de los resultados, con la siguiente discriminacion para cada individuo

- 1 Jefe economico de la familia
- 2 Sexo
- 3 Edad
- 4 Estado civil
- 5 Instruccion
- 6 Rama de actividad economica
- 7 Condicion de trabajo dentro de cada actividad economica
- 8 Nacionalidad
- 9 Religion
- 10 Poblacion activa e inactiva
- 11 Poblacion urbana y rural
- 12 Defectos fisicos

Al Contralor actual, doctor Gonzalo Restrepo, ha correspondido continuar el trabajo de elaboracion y preparacion del material de publicacion. Ya fue editado el primer volumen de la serie que formara el conjunto censal de 1938, fue este el *Primer Censo de Edificios* hecho en Colombia, aprovechando el material de este levantamiento previo que se hizo al Censo de poblacion, en abril 20 de 1938, a fin de acomodar los resultados finales a la mas rigurosa y estricta tecnica censal

Este trabajo ha sido apreciado con entusiasmo en el Exterior. El Secretario de la Sociedad de Estadística de París, señor A Barriol, escribe al respecto

Société de Statistique de Paris Secrétaire Général A Barriol 27 Rue de Mogador 9 Paris le 28 11 1939

Juan de D Higuera Directeur National de la Statistique de Colombie Bogota Colombie

Mon cher et honore Collegue Je viens de recevoir pour notre Bibliothèque votre très bel ouvrage sur le premier recensement des immeubles de Colombie. J'ai l'impression que ce remarquable travail, dont nous n'avons pas l'équivalent en France, rendra de grands services, et je vous félicite très sincèrement d'avoir pu mener à bien une tâche très difficile. Veuillez agréer, mon cher et honore Collegue, l'expression de mes sentiments très cordialement dévoués

A BARRIOL

Finalmente, el Contralor Restrepo presentó al señor Ministro de Gobierno y al Congreso del año de 1939, la *Memoria del Censo* con los datos necesarios para formar criterio sobre la materia, y así obtener su aprobación de aquella alta corporación nacional.

El Censo de 1938, aprobado ya por el

Congreso Nacional (Ley 20 de 1939 - Noviembre 20), es el más bien planeado y mejor ejecutado de cuantos se han hecho en Colombia. Se estudió su especificidad hasta donde fue necesario y sus resultados, hoy completamente elaborados con un numeroso equipo de tabulación Hollerith, serán publicados en quince volúmenes (uno por cada Departamento y uno para Intendencias y Comisarias). Este solo detalle puede dar idea de su valor, en comparación con los Censos anteriores. Pero el asunto más importante para el futuro es indudablemente que queda ya establecida y asentada una tradición censal que podrá perfeccionarse más, si es necesario, pero no permitirá retroceder en el campo ya alcanzado de esta importante y capitalísima investigación demográfica.

Dado el valor total del trabajo, resultó un costo de \$ 012 moneda corriente, aproximadamente, por cada habitante.

En el apéndice final de este estudio se transcribe el extracto de la población con la especificación con que fue presentado al Congreso para su aprobación.

Comprende la población discriminada en cuanto a su localización por Departamentos, Intendencias, Comisarias y Municipios, además hay especificación por sexos, para la población urbana y para la rural.



SEGUNDA PARTE

Análisis matemático aplicado al estudio del desarrollo de la población humana

CAPITULO IV

INTERPRETACION ANALITICA DEL DESARROLLO DE LA POBLACION HUMANA

El estudio del crecimiento numérico de la población humana por procedimientos de cálculo presenta cierta dificultad, debido al hecho bien conocido de que son muy pocas las funciones matemáticas que se prestan a la interpretación de los fenómenos físicos, químicos y biológicos.

Casi todas las fórmulas usadas para este objeto son de origen empírico, pero prestan servicios muy útiles en los cálculos de datos intercensales, aplicables al establecimiento de coeficientes demográficos en las estadísticas vitales, ya que los censos de población se refieren a periodos de diez años en lo general, y en veces hasta de cinco años.

Estas leyes del crecimiento, deducidas para periodos intercensales de corta duración, como caso general no tienen la misma aplicación en los años extracensales, no pueden tomarse por lo tanto en el futuro, como postulados invariables de las leyes del crecimiento orgánico en determinadas agrupaciones. Para los años intercensales son empíricas, como ya se dijo, pero para el estudio de las estadísticas vitales no puede establecerse otro sistema más lógico. Las leyes de crecimiento así establecidas, y especialmente cuando abarcan un gran periodo de tiempo hacia atrás, responden con bastante exactitud al próximo periodo censal desconocido, cuando este se cuenta de cinco a diez años, especialmente.

Los métodos de interpolación por las progresiones aritméticas o geométricas, no dan resultados de algún valor sino cuando se toman para periodos de cinco a diez años el sistema recomendable consiste en tomar un número de puntos censales, y hacer pasar por ellos una curva de determinado número de parámetros, según que se quieran abarcar todos los puntos o so-

lamente algunos de ellos, tomados convenientemente por su posición racional dentro de un conjunto de datos censales previamente estudiados. Fuera de este procedimiento, que en ocasiones es suficiente, se debe al mismo tiempo ensayar otro método, llamado *ajuste de las curvas*, que consiste en obtener aquella que se acomoda o acerca más a un gran número de puntos censales, determinando así una especie de promedio de posición, dado el procedimiento que ha de emplearse y del cual se tratara más adelante, este sistema se debiera llamar, y así es conocido en el análisis matemático, el sistema de *ajuste de curvas por el método de los mínimos cuadrados*.

De acuerdo con el programa advertido al principio de este estudio, trataremos sucesivamente el problema, así:

- a) Con el empleo de fórmulas empíricas
- b) Con el empleo de fórmulas de origen racional

A) FORMULAS EMPIRICAS

En este estudio vamos a tratar tres formas de curvas, para escoger la de mayor aproximación, como interpretación del crecimiento de la población colombiana, de acuerdo con los datos censales que merezcan mayor crédito por el grado de exactitud que se le reconozca.

PRIMERA FORMA

La parábola común o de segundo grado

Para periodos de 20 a 40 años, la rama de una curva parabólica común se ajusta con bastante exactitud a tres o cuatro datos censales, tomando tres puntos solamente, bastaría determinar las constantes o parámetros de la ecuación

$$y = a + bx + cx^2$$

en que y es la población calculada y x representa periodos de tiempo partiendo

de un año cualquiera, estos periodos pueden ser de año en año, lustros (de 5 años), o decenios

Si se trata de un ajuste para mayor numero de puntos censales se recurriria al metodo de los minimos cuadrados, y en todo caso, se tomara como ley de crecimiento la interpretada por la ecuacion de menores dispersiones con respecto a la serie censal que se esta estudiando

SEGUNDA FORMA

La parabola cubica o de tercer grado

Para periodos mas largos que los anotados antes, las parabolos de segundo grado no estan indicadas debido a las diferencias ya muy grandes habidas con los datos censales

Pritchett A S fue el primero en hacer un intento para acomodar los cambios de la poblacion de los Estados Unidos durante 90 años a esta clase de curvas

Tomando los censos habidos entre 1790 y 1880, propuso Pritchett, hace cerca de 60 años, esta curva

$$y=a+bx+cx^2+dx^3$$

en que x e y tienen el mismo significado antes explicado. Se tomo el eje vertical de coordenadas en el año de 1840, por estar cerca de la mitad del periodo, lo que facilita los calculos, para la obtencion de las constantes de la ecuacion, de ordinario muy laboriosas

Se obtuvieron datos intercensales muy aceptables, pero para los años siguientes la extrapolacion no dio resultados de aprovechamiento posible por su gran diferencia con los censos correspondientes, como se muestra en el cuadro numero I, en efecto, en los primeros diez años, en 1890, que se registro una poblacion de 62 948,000 habitantes, se obtuvo una diferencia de 314,000 en menos (el 0,5 por 100), relativamente de poca consideracion, pero en cambio, esta diferencia se acentua de manera creciente en los años siguientes, así

CUADRO NUMERO I

A	Poblada	Diferencias	/
1900	75 995 000	1 477 000	+ 1 9
1910	91 972 000	2 701 000	+ 2 9
1920	105 711 000		
1930	122 775 000		

Como se ve, las diferencias crecen continuamente con el tiempo, para los años de 1920 en adelante, no calculados en el cuadro anterior, el error tiene que seguir aumentando, ya que se trata de una parabola convexa con respecto al eje horizontal de las x , y la poblacion de los Estados Unidos, tratada por los metodos racionales de la curva logistica, que veremos en el respectivo capitulo (capitulo V de este estudio), tiene un punto de inflexion antes de llegar a los cien millones de habitantes, es decir, antes del año de 1920, o sea entre los años de 1915 a 1916. En estas condiciones la curva logistica, que es una sigmoide, toma ya la forma concava con respecto al eje de x , y por consiguiente diverge continuamente y de manera creciente, de la parabola cubica

Los calculos por curva logistica para la poblacion de los Estados Unidos fueron hechos en un periodo de 120 años, entre 1790 y 1910, los resultados obtenidos, en cambio, si son de una precision muy aceptable. La curva se hizo pasar por los puntos extremos y el punto medio de este periodo, tomando datos del cuadro que con tiene los calculos respectivos, encontramos estos valores

CUADRO NUMERO II

PRIMERA PARTE			SEGUNDA PARTE	
A	Población millones		Diferencia /	Observaciones posteriores de la población
	Calculado	Observado		
1790	3 929	3 929	0 0	
1850	23 192	23 192	0 0	
1910	91 972	91 972	0 0	
1920	107 394		+ 1 5	105 711
1930	122 397		- 0 3	122 775
1940	136 318			
1950	148 678			
1960	159 230			
1970	167 945			
1980	174 941			
1990	180 437			
2000	184 678			
2020	190 341			
2040	193 509			
2060	195 249			
2080	196 337			
2100	196 681			

Los datos de la primera parte de este cuadro estan calculados hasta el año 2100, con 196,681,000 habitantes (*Studies in Hu*

man Biologie, por Raymond Pearl) Si llevamos al mismo cuadro los de la segunda parte con observaciones posteriores para los censos de 1920 y 1930, vemos con que aproximacion tan aceptable se acomoda la extra-poblacion de estos 20 años, que terminan con un error apenas del 3 por mil. La población de los Estados Unidos en 1940, sera muy probablemente de 136,320,000 en numeros redondos, si hemos de dar credito a la ley establecida así para el computo de este crecimiento

TERCERA FORMA

La parabola logaritmica

Antes de estudiar las formulas de origen racional, trataremos sobre una tercera formula empirica, la llamada parabola logaritmica, cuya ecuacion es

$$y = a + bx + cx^2 + d \log x$$

(Logaritmos comunes)

Desde hace 30 años el profesor Pearl demostro la utilidad de esta nueva formula para representar los cambios del crecimiento organico aplicandola a un grupo de observaciones hechas sobre la planta acuatica *ceratophyllum*. Tambien ha sido aplicada, y aun en mayor escala, para interpretar el movimiento de otros crecimientos, como el cambio de tamaño de los huevos, despues de una serie de desoves sucesivos y los de la produccion de la leche con la edad. Asimismo Donaldson y Hatay han utilizado esta rela-

cion en la curva del crecimiento del cuerpo de las ratas blancas y los sapos

Aunque el crecimiento de la poblacion no puede asimilarse sino dentro de una amplia analogia al del tamaño de un organismo, sin embargo, es esencialmente un fenomeno de crecimiento, por esta razon se ha considerado la parabola logaritmica como una curva mas apropiada para representar crecimientos de poblacion, que la simple parabola cubica o la de segundo grado

Con los datos de la Oficina Central de Censos, en los Estados Unidos, despues de algunas correcciones sobre los originales obtenidos, se ha hecho un ajuste de esta curva por el metodo de los minimos cuadrados, tomando todos los puntos de los periodos decenales comprendidos entre 1790 y 1910. La ecuacion obtenida fue

$$y = 9\,064\,900 + 6\,281\,430x + 842\,377x^2 + 19\,829\,500 \log x$$

y representa poblacion, x , periodos decenales, a causa de su forma logaritmica se tomaron ejes coordinados en 1780, a fin de evitar abscisas nulas o negativas, incompatibles con el empleo de expresiones logaritmicas

Una comparacion de esta curva con la parabola cubica usada por Pritchett y obtenida para los mismos datos censales por el citado procedimiento de los minimos cuadrados muestra inmediatamente las ventajas de exactitud de los datos de la primera curva sobre los de la segunda. Veamoslo a continuacion

CUADRO NUMERO III

1	POBLACION			5	6
	2	3	4		
AÑOS	Segun 1	Cálculo de Pritchett	Cálculo de logaritmica	Diferencia 3	Diferencia 4
1790	3 920 000	4 012 000	3 693 000	+ 83 000	- 236 000
1800	5 308 000	5 267 000	5 865 000	- 41 000	+ 557 000
1810	7 240 000	7 059 000	7 293 000	- 181 000	+ 53 000
1820	9 638 000	9 571 000	9 404 000	- 67 000	- 234 000
1830	12 866 000	12 985 000	12 577 000	+ 119 000	- 289 000
1840	17 069 000	17 484 000	17 132 000	+ 415 000	+ 63 000
1850	23 192 000	23 250 000	23 129 000	+ 58 000	- 63 000
1860	31 443 000	30 465 000	30 633 000	- 978 000	- 810 000
1870	38 558 000	39 313 000	39 687 000	+ 755 000	+ 1 129 000
1880	50 156 000	49 975 000	50 318 000	- 181 000	+ 162 000
1890	62 948 000	62 634 000	62 547 000	- 314 000	- 401 000
1900	75 995 000	77 472 000	76 389 000	+ 1 477 000	+ 394 000
1910	91 972 000	94 673 000	91 647 000	+ 2 701 000	- 325 000
				R ³ = 935 000 +	R ⁴ = 472 000 +
1920		114 416 000	108,214 000	Promedios cuadraticos	

El valor R , *medio cuadrático* de las diferencias en las columnas 5 y 6, tiene cierta relacion con las desviaciones de las series en las columnas 3 y 4, y por analogia puede asi tomarse este valor como una determinante aproximada de sus dispersiones

En las columnas 3 y 4 los calculos estan corregidos por reduccion a las fechas precisas, de acuerdo con la epoca de los levantamientos censales, segun el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO IV

An	M s y d	Pobl 6 1 A E t d t d 1918
1790	Primer lunes de agosto	3 921 214
1800	Primer lunes de agosto	5 308 483
1810	Primer lunes de agosto	7 239 881
1820	Primer lunes de agosto	9 638 453
1830	Junio 1	12 866 020
1840	Junio 1	17 069 453
1850	Junio 1	23 191 876
1860	Junio 1	31 143 321
1870	Junio 1	38 558 371
1880	Junio 1	50 155 783
1890	Junio 1	62 947 714
1900	Junio 1	75 994 575
1910	Abril 15	91 972 266

La columna 2 del cuadro III fue tomada de estos datos, aproximando las unidades de los miles

La simple inspeccion de las columnas 5 y 6 en el cuadro III, demuestra la mejor interpretacion del crecimiento de la poblacion por la parabola logaritmica. El Censo de los Estados Unidos en 1920 fue de 105,711,000 habitantes este dato se aproxima desde luego mas al de la extrapolacion del cuadro numero III para dicho año, hecha a base de la parabola logaritmica (108,214,000) y difiere en cambio, mucho, del correspondiente a la parabola cubica (114,416,000)

Para adelantar conocimientos sobre el estudio de las series posteriores, al analizar la poblacion colombiana por estos mismos metodos, veamos algo sobre la regularidad de las series de las columnas 3 y 4

Los valores

$$R_3 = 935,000$$

$$R_4 = 472,000$$

como representaciones de desviacion en cada serie, se refieren al grado de con

centracion de las variables alrededor de los valores observados $R_4 < R_3$ acusa desde luego una mejor uniformidad en la serie de la columna 4

Si buscamos ahora la *media de desviaciones*, en estas diferencias, encontramos para ambas series

$$\Delta_3 = 567,000 \text{ prox}$$

$$\Delta_4 = 363,000$$

y finalmente las relaciones

$$\frac{\Delta_3}{R_3} = 0.606$$

$$\frac{\Delta_4}{R_4} = 0.768$$

Las cuales en su calidad de coeficientes de variacion indican tambien que la serie de la columna 4 tiene menores anomalías que la serie de la columna 3

Trae Pearl (ob cit) un ejemplo maravilloso sobre la aplicacion de esta curva al objetivo que estudiamos, supongamos, dice, un matematico de la epoca de la guerra civil, que deseara estimar la poblacion de los Estados Unidos en 1910. De acuerdo con los datos censales de aquella epoca, entre 1790 y 1860, encontraria la ecuacion

$$y = 8619800 - 680740x + 822709x^2 + 16987200 \log x$$

Al calcular la poblacion de 1910 con esta curva, obtendria 92 523,000 habitantes, es decir, apenas medio millon mas proximamente de diferencia con el verdadero dato, o sea un error del 0.6%. Una profecia con un error inferior al 1% para un suceso que debia ocurrir 50 años mas tarde, es sin duda una magnifica prediccion

Insiste todavia el autor citado en persistir segun los resultados de este calculo, en los periodos decenales sucesivos que van de 1790 a 1910, calculando de nuevo la ecuacion respectiva al fin de cada periodo, y consigue demostrar que en cada caso los errores estan comprendidos entre el 0.4 y 0.9%, si se exceptua el final de 1880, donde los datos censales anteriores a este año, que presentan visibles señales de anomalía, ejercen una marcada influencia en los resultados del calculo

De todo lo anterior se concluye asi

1° De las formulas empiricas conocidas para interpretacion de las leyes del creci

miento de la poblacion, la parabola logaritmica es la que da resultados mas exactos, especialmente para periodos relativamente largos, como una centuria, por ejemplo

2° La aplicacion de la parabola logaritmica a la poblacion de los Estados Unidos en un periodo de 120 años, da mayor aproximacion que las otras formulas empiricas

3° La precision obtenida por la parabola logaritmica, es suficiente para que pueda ser usada en todos los casos, con resultados de aplicacion practica absolutamente aceptables

No obstante lo anterior, para casos en que solo se tengan datos censales de algun valor en periodos mas cortos (medio siglo por ejemplo), como ocurre en Colombia, las parabolas comunes de segundo y de tercer grado, que no tienen forma trascendente, dan resultados de una exactitud comparable a la de la parabola logaritmica. Por esta razon las estudiaremos a continuacion, una a una, y al final se presentara un resumen comparativo de todos los resultados obtenidos, antes de estudiar las formulas de origen racional

ELECCION DE LOS PERIODOS DE ESTUDIOS

Para el estudio del desarrollo de una agrupacion humana en el tiempo, es necesario partir de un area limitada dentro de la cual tenga lugar ese crecimiento, en parte vegetativo, en parte determinado por el movimiento de las corrientes migratorias. En nuestro caso el fenomeno por estudiar va a tener una tendencia completamente vegetativa, de crecimiento organico, pues el migratorio, ni en estos ultimos tiempos alcanza a representar mas que una cifra de valor insignificante (menos de 35 personas por cada 100,000 habitantes)

Las dos primeras epocas censales, entre 1770 y 1870, son un siglo caracterizado por cambios bruscos y frecuentes en la extension del territorio a mas de la poca veracidad en las cifras de poblacion (Parte superior de Lamina I). En la tercera epoca (1870-1905) no se registran cambios apreciables del territorio, ni tampoco datos censales. De modo que el estudio emprendido solo puede referirse a los censos de 1905 a 1938. Si observamos el grafico de superficies citado, en la parte superior de Lamina I, encontramos sin embargo un cambio de superficie señalado por las ex-

tensiones allí anotadas, de 1,548,300 y 1,139,155 kilometros cuadrados, una diferencia poco mayor de 400 000 kilometros cuadrados entre la cual se incluye la superficie de Panama, con una extension aproximada de 87,500 kilometros cuadrados (No se tienen en cuenta los ultimos arreglos de limites con Costa Rica)

Panama, que se desmembro de Colombia desde 1903, si tenia una poblacion apreciable para introducir una variacion anormal en el estudio en que nos ocupamos, por eso su poblacion ha sido sistematicamente descontada desde 1835 en los graficos de Lamina I. Los censos oficiales de 1905 en adelante, aqui contemplados, tampoco la incluyen. Debe observarse finalmente lo que sigue

1° La superficie de 312,500 kilometros cuadrados (diferencia entre los 400,000 anotados y la superficie de Panama), corresponde a extensiones limitrofes de las Republicas vecinas a Colombia, casi completamente despobladas

2° Aunque desde 1835 se anotan datos de poblacion sin incluir la de Panama, en Lamina I (circulos de fondo rojo), no se han hecho las deducciones correspondientes de superficie en la parte correspondiente de este grafico, pues la realidad de los hechos que deben mostrar esos cambios así lo exige. Desde 1908, en adelante, si esta descontada la superficie de Panama, se tomo esta fecha para hacerla coincidir con la de los tratados diplomaticos que intervinieron en ese *affaire*

3° En las epocas censales de 1770 a 1870 hemos descartado la mayoria de los datos de poblacion conocidos, de acuerdo con la critica antes expuesta, hemos concedido algun valor, sin embargo a las cifras de estos cuatro años

1770	La Colonia y sus Virreyes	{	Messia de la Zerda	Marques de
1778			Armijo	Los Religiosos de la Compañia de Jesus

1827	Primer Censo Oficial	{	Ia Gran Colombia
			El General Francisco de Paula Santander

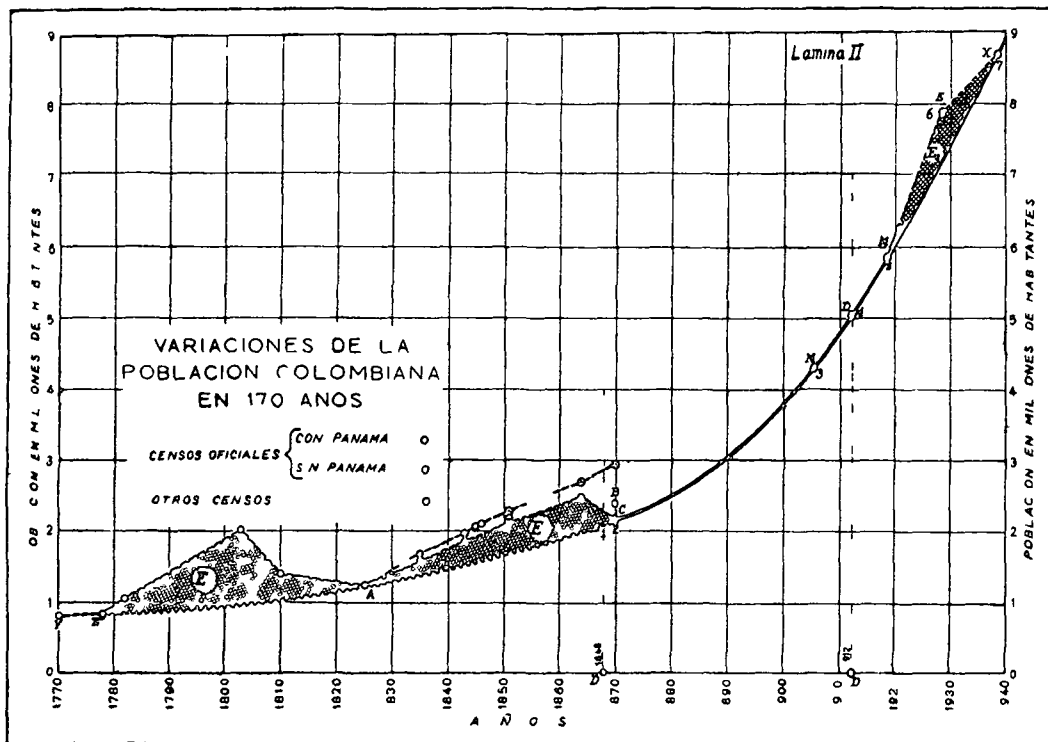
1870	Sexto Censo Oficial	{	Epoca de estructuracion republicana con Tomas Cipriano de Mosquera

Sobre estos años y sobre todos los de esas epocas, citados como años censales, no existen datos de mes y dia. Para su representacion grafica se ha tomado como punto arbitrario el 1° de enero de cada año. El hecho así concebido no introduce

error apreciable en este estudio, que solo se aplicara desde el Censo de 1870 en adelante, separado de los años censales de la cuarta epoca por un gran lapso en el que no hubo actividad censal alguna, asi que el pequeño desplazamiento que pueda presentar el punto C (Lamina citada), carece de valor. Es evidente, ademas, que estos datos de mes y dia no fueron posibles en las investigaciones censales de esas epocas, la poca literatura historica que hemos encontrado parece demostrar para el Censo de 1870, que los datos de conjunto fueron reunidos por levantamientos que hicieron los Estados, entre los

años de 1869 y 1870 de acuerdo con la Ley de 10 de abril de '869, que así lo ordenaba. El 1º de enero de 1870 parece corresponder a la mitad del periodo de este levantamiento.

4º Solo hay levantamientos censales a los cuales se les pueda asignar mes y dia, desde el año de 1905 para aca. Esas fechas estan citadas en el cuerpo de este estudio, y se tuvieron muy en cuenta para la colocacion grafica de los puntos censales correspondientes, en la Lamina citada, y asimismo, mas adelante, para el calculo de curvas y datos intercensales.



La zona censal que debemos elegir como periodo apropiado para los calculos analiticos, esta claramente indicada en el grafico de la Lamina II, por la curva C N D M X. Este grafico es el mismo de la Lamina I con menos especificaciones. Entre la curva Y Z A C N D M X, que hemos considerado como una interpretacion grafica del desarrollo normal de la poblacion, y la linea poligonal que une los datos censales sucesivos, se forman las tres superficies, E_1 , E_2 y E_3 , estas tres superficies deberian llamarse las zonas de error en cada una de las epocas censales, y sus valores deberian ser proporcionales a la mayor o menor veracidad del conjun-

to de los datos en cada epoca. Los puntos C D N M E X estan, ademas, marcados en la Lamina citada, con los numeros 2, 3, 4, 5, 6 y 7. En el curso de este trabajo seran designados los puntos censales con letras o con numeros, indistintamente.

Es evidente, ademas, que

$$E_1 > E_2 > E_3$$

Esta es la expresion de un antiguo y muy conocido dicho censal, que reza así: *cada investigacion censal que se haga en periodos sucesivos de diez a quince años, sobre un nucleo de poblacion que se desarrolla normalmente, es siempre mas per-*

fecta que la anterior. No hay datos para valuar la superficie de la zona de error correspondiente a la TERCERA EPOCA de este estudio, porque no hubo levantamientos censales a que referirse, en todo ese periodo. Aqui hemos observado como disminuyen claramente esas zonas de error, a medida que el tiempo avanza, pero tenemos que advertir que la zona E_3 es de categoria distinta a las zonas E_1 y E_2 , el dato censal de 1928, marcado con el punto E no es erroneo, sino simplemente equivocado, es el dato de una investigacion que carecio de sinceridad. Son muchos los hechos historicos y de la administracion publica que acreditan esta descalificacion, en todo caso, y sin salirnos de los limites de este estudio, ni el valor censal E, sera considerado en los analisis matematicos que haremos mas adelante, ni el valor de la zona E_3 puede considerarse propiamente de error censal, como consecuencia logica de lo anterior. De suerte que, como lo dijimos antes, la curva C N D M X abarca el periodo censal que debemos tomar como base para el estudio analitico emprendido.

Podriamos tambien limitar el estudio al periodo comprendido entre los puntos N y X, y ello seria suficiente para los objetivos generales que se persiguen, ya que

asi encontraríamos toda la serie intercensal que va de 1905 a 1938 pero el punto C tiene una significacion especial en este Grafico de la Lamina II, en efecto

a) Por una parte, es el primer dato censal criticado a la luz de una conciencia estadística desde la época de los Virreyes,

b) Y además, para precisar e interpretar mejor los fenomenos que se desarrollan en una época, o como dicen los estadísticos, para ver mejor hacia adelante, hay que mirar hacia atras

Así que, tomando el punto C como orientador, o punto de arranque obligado, podemos interpretar mejor los fenomenos de crecimiento o desarrollo numerico de la poblacion en el periodo que limitan los puntos extremos N y X, para encontrar los datos intercensales utilizables en el estudio anual comparativo de las estadísticas vitales, en los ultimos 35 años que van corridos hasta hoy

CALCULOS PRELIMINARES

Para facilitar el estudio de las curvas empiricas antes descritas, vamos a exponer algunos datos de aplicacion posterior, relativos al valor numerico de la poblacion y al de los periodos respectivos

CUADRO NUMERO V

Numeros de designacion	Puntos	Años	Poblacion censal	Fechas	Ordenadas en miles de habitantes	ABSCISAS EN AÑOS	
						A partir de la vertical del punto 4	A partir de la vertical del punto 1
1		1838		Enero			0
2	C	1870	2 167 952	Enero	2168	- 42 178	+ 2 000
3	N	1905	4 355 477	Junio 15	4355	- 6 723	+ 37 435
4	D	1912	5 072 604	Marzo 5	5073	0	+ 44 178
5	M	1918	5 855 777	Octubre 14	5856	+ 6 608	+ 50 786
6	E	1928	7 851 110	Noviembre 17	7851	+ 10 704	+ 60 880
7	X	1938	8 701 816	Julio 5	8702	+ 20 332	+ 70 510

El censo de 1870, con 2,167,952 habitantes, resultado del dato que trae Anibal Galindo de 2,391,984, rebajado de la poblacion de Panama en esa fecha, que se calculaba en 224,032 habitantes

Como se ve, el cuadro V se ha hecho con los datos censales antes transcritos y las anotaciones de Lamina II, en los intervalos de las fechas censales se han aproximado milésimos de año

Las ordenadas (y) van a representar miles de habitantes, las abscisas años. Hay dos calculos de abscisas en las primeras el eje de ordenadas se considera pasando por el punto D-Año de 1912, marzo 5, se usaran para estudios en la parabola comun de segundo grado y en la parabola cubica, la localización de este eje desde luego puede ser cualquiera, pero el punto escogido se presta a simplificar un poco el

procedimiento general, como lo veremos despues En el segundo calculo de abscisas se ha tomado una fecha anterior al año de 1870 (el año de 1868), por donde pa

sara el eje vertical de las ordenadas a fin de que no resulten abscisas nulas ni negativas, pues han de servir para los calculos con la parabola logaritmica

CUADRO NUMERO VI—Tabla de los valores usados en los calculos, con origen de coordenadas en 1912—marzo 5 Punto D Lamina II

Puntos y años	x	x	x ³	x ⁴	x
2 1870	- 42 178	+ 1778 983684	- 75033 9738237	+ 3 161782 947938	- 133 484215 180744
3 1905	- 6 723	+ 45 198729	- 303 8710550	+ 2042 925103	- 13734 585167
4 1912	0 000	0 000000	0 0000000	0 0000000	0 0000000
5 1918	+ 6 608	+ 43 365634	+ 228 5427077	+ 1906 690212	+ 12599 408921
6 1928	+ 16 704	+ 279 023616	+ 4660 8104817	+ 77854 178286	+ 1 300476 193989
7 1938	+ 26 332	+ 693 374224	+ 18257 9060664	+ 480767 814507	+ 12 659578 091414

Puntos y años	x ⁵	y	yx	yx	yx ³
2 1870	+ 5620 097227 2204	2168	- 91441 904	+ 3 856836 627	- 162 673655 254
3 1905	+ 92337 6180	4355	- 29278 665	196810 465	- 1 323358 446
4 1912	0 0000	5073	0 000	0 000	0 000
5-1918	+ 83206 8941	5856	+ 38696 448	+ 255706 128	+ 1 689700 094
6-1928	+ 21 723154 3446	7851	+ 131143 104	+ 2 190614 409	+ 36,592023 088
7 1938	+ 333 352010 2659	8702	+ 229141 064	+ 6 033742 497	+ 158 880507 431

ESTUDIO DE LA PARABOLA COMUN

La forma de la curva que vamos a analizar corresponde a la ecuacion

$$y = a + bx + cx^2$$

El problema se reduce a la determinacion de los tres parametros, a, b y c

Primero haremos esta determinacion buscando tres puntos obligados en los datos censales, por donde pasara esta parabola, y luego tomando un mayor numero de puntos, que se ajustaran por el metodo de los minimos cuadrados

La primera operacion para la eleccion de los tres puntos mas indicados como puntos obligados de la curva, consiste en representarlos graficamente, para ver como enfilan sobre la forma de la curva mas probable, representativa de la ley que se busca, en la Lamina II estos puntos son a simple vista D, M y X como para un primer ensayo, no podria prescindirse del punto X para tomar el punto C, ya que aquel corresponde a la mejor realidad censal colombiana, y en tal caso, nuestra parabola solo abarcara la zona censal de la CUARTA EPOCA

Del Cuadro numero VI obtenemos

CUADRO NUMERO VII

Puntos	Años	Abscisas x	Ordenadas y	x ²
4	1912	0 000	5073	0 000000
5	1918	6 608	5856	43 665664
7	1938	26 332	8702	693 374224

Reemplazando en la ecuacion adoptada

$$\begin{aligned} 5073 &= a \\ 5856 &= a + 6 608b + 43 665664c \\ 8702 &= a + 26 332b + 693 374224c \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones da como resultado para los parametros

$$\begin{aligned} a &= 5073 \\ b &= 112 0186 \\ c &= 0 9797 \end{aligned}$$

y por ende la ecuacion buscada, con origen de coordenadas en el punto D₁ (Lamina II) es

$$y = 5073 + 112 0186x + 0 9797x^2 \quad (1)$$

Con los datos del cuadro VI obtenemos

CUADRO NUMERO VIII

Puntos	Años		POBLACION EN MILTS		CORRECCIONES	
			Calculada	Observada	Absolutas	En %
2	1870	-42 178	2091 2	2168	+ 76 8	+354
3	1905	- 6 723	4364 2	4355	- 9 2	-0 21
4	1912	0 000	5073 0	5073	0 0	0 00
5	1918	+ 6 608	5856 0	5850	0 0	0 00
6	1928	+16 704	7217 5	7851	+633 5	+8 78 (1)
7	1938	+26 332	8702 0	8702	0 0	0 00

(1) El % fue hecho con la poblacion calculada en los demas casos con la observada

Es interesante observar

1º Como hay apenas 3 5% de error con el punto C, cuando es un Censo tan distanciado de los puntos obligados D M y X. Lo que demuestra la adaptabilidad de la parabola comun a la ley censal general

2º El punto N (1905) con un error solamente del 0 21%

3º El error del 8 77% para el punto E no tiene importancia, segun ya se habia convenido. Representa un excedo de poblacion de 633,500 habitantes

Todas las curvas que vamos a estudiar seran calculadas tanto por su paso directo por puntos debidamente seleccionados, como por el ajuste a los puntos por el metodo de los minimos cuadrados

AJUSTE DE CURVAS POR EL METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS

Sea una serie de puntos 1 2, 3, etc., y A B una curva que pasa por entre ellos, de manera que se acerque lo mas posible a todas sus posiciones (Fig 1). El ajuste de esta curva, cuya forma esta previamente determinada, se hace de modo que la

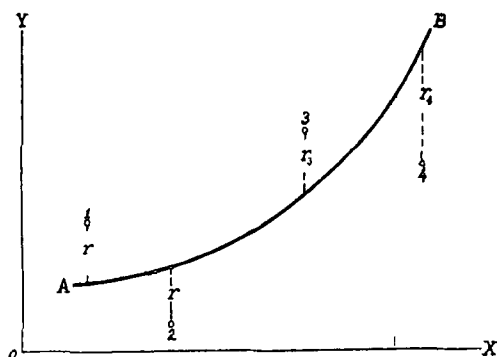


Fig 1

suma de los cuadrados de las distancias verticales r_1, r_2 , etc de los puntos a la curva sea lo mas pequeña posible, o sea que

$$\Sigma r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \dots = \text{minimo}$$

Sea la forma de la curva A B dada por la ecuacion

$$y = f(x)$$

Igualmente, las coordenadas de cada punto, de los de la Figura 1, deben satisfacer en ecuaciones similares

$$y_1 = f_1(x)$$

De aqui que

$$r^2 = (y_1 - y)^2 = \Sigma [f_1(x) - y]^2$$

En la expresion $f_1(x)$ figuran desde luego los distintos parametros de la curva A B, que suponemos a, b, c, etc

Para el minimo de la expresion anterior tendremos entonces las ecuaciones de condicion

$$\Sigma f_1(a) = 0$$

$$\Sigma f_1(b) = 0$$

etc etc

Esto nos da un sistema de ecuaciones de primer grado, de donde se despejan los valores de las constantes de la curva A B

Aplicando el metodo descrito a la parabola estudiada, podriamos tomar los puntos C, N, D, M y X de la Lamina II para hacer pasar por entre ellos una curva parabolica como la ya estudiada, pero es conveniente hacer el estudio para los cuatro ultimos puntos solamente, y observar, como antes, si la curva asi proyectada se acerca a C. De este modo se comprueba si la posicion de estos cuatro puntos corresponde a la forma dominante de la

ley que deben interpretar, o se necesita combinarlos con el punto C

La ecuacion segun lo dicho seria

$$y_1 = a + bx + cx^2$$

$$\Sigma r = \Sigma(a + bx + cx^2 - y)^2$$

Para $\Sigma f_1(a) = 0$, y las demas condicio

nes antes establecidas, obtenemos sucesivamente

$$\left. \begin{aligned} 4a + b\Sigma x + c\Sigma x^2 - \Sigma y &= 0 \\ a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 - \Sigma xy &= 0 \\ a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 - \Sigma x^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Tomando del cuadro numero VI los valores del caso, obtenemos el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO IX

PUNTOS	x	y	x ²	x ³
3	6 723	4355	45 198729	303 871055
4	0 000	5073	0 000000	0 000000
5	6 608	5856	43 665664	288 542707
7	26 332	8702	693 374224	18257 930066
	$\Sigma x = 26\ 217$	$\Sigma y = 23\ 986$	$\Sigma x^2 = 782\ 238617$	$\Sigma x^3 = 18242\ 60172$

PUNTOS	x ⁴	xy	x ² y
3	2042 920103	29278 665	196840 465
4	0 000000	0 000	0 000
5	1906 590212	38696 448	255706 128
7	480767 814507	229141 064	6 033742 497
Totales	$\Sigma x^4 = 484717\ 429822$	$\Sigma xy = 238558\ 847$	$\Sigma x^2y = 6\ 486289\ 090$

Reemplazando valores en el sistema de ecuaciones (2) tenemos

$$\begin{aligned} 4\ 000\ 000a + 26\ 217\ 000b + 782\ 238\ 617c &= 23986\ 000 \\ 26\ 217\ 000a + 782\ 238\ 617b + 18\ 242\ 601\ 720c &= 238558\ 847 \\ 782\ 238\ 617a + 18\ 242\ 601\ 720b + 484\ 717\ 429\ 822c &= 6\ 486\ 289\ 090 \end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} a &= 5071 \\ b &= 112\ 75165 \\ c &= 0\ 95492 \end{aligned}$$

Entonces la ecuacion buscada seria

$$y = 5071 + 112\ 75165x + 0\ 95492x^2 \quad (3)$$

Calculando ahora un cuadro semejante al del numero VIII, obtenemos

CUADRO NUMERO X

PUNTOS	AÑOS	x	POBLACION EN MILES		CORRECCIONES	
			Calculada	Observada	Absolutas	En %
2	1870	-12 178	2014 1	2168	+153 9	+7 10
3	1905	-6 723	4356 1	4355	- 1 1	-0 02
4	1912	0 000	5071	5073	+ 2 0	+0 04
5	1918	+6 608	5857 7	5856	- 1 7	-0 03
6	1928	+16 704	7220 8	7851	+630 2	+8.73
7	1938	+26 332	8702 1	8702	- 0 1	0 00

Comparando esta curva con la del cuadro VIII vemos que es en general mas aceptable para los puntos de importancia N D M y X Para el punto C, sin em

bargo, presenta mayor desviacion (7 10%) y para la poblacion de 1928 acusa una diferencia de 630,200 habitantes

Siguiendo los procedimientos anteriores, se pueden ensayar todavía

1° Una curva que pase por los tres puntos 2, 4 y 7

2° Una curva ajustada a los puntos 2, 3, 4, 5 y 7

1° La curva de los puntos 2, 4 y 7

Con los datos del cuadro VI obtenemos

$$2168 = a - 42178b + 177898368c$$

$$5073 = a$$

$$8702 = a + 26332b + 69337422c$$

De donde se deducen

$$a = 5073$$

$$b = 11131893$$

$$c = 100631$$

Por lo tanto la ecuación de la parábola respectiva, sería

$$y = 5073 + 11131893x + 100631x^2 \quad (4)$$

Y como antes, deducimos el siguiente cuadro

CUADRO NUMERO XI

PUNTOS	AÑOS	POBLACION		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En ‰
2	1870	2168	2168	00	000
3	1905	4370	4255	-150	-034
4	1912	5073	5073	00	000
5	1918	5852.5	5855	+35	+006
6	1928	7213.1	7851	+637.9	+884
7	1938	8702	8702	00	000

Al obligar al punto 2, muy distante de los otros probablemente la curva interprete mejor la ley del desarrollo de la población, pero aparece un poco más marcada la separación del punto 3, que en el cuadro VIII correspondiente a la curva de los puntos 4, 5 y 7

2° Una curva ajustada a los puntos 2, 3, 4, 5 y 7

Con los datos de los cuadros VI y IX preparamos el siguiente, al cual vamos a dar una mayor extensión, para su aprovechamiento en otros cálculos

CUADRO NUMERO XII

PUNTOS	x	y	x ²	x ³
Para los puntos 3 4 5 y 7	$\Sigma x = 26217$	$\Sigma y = 23986$	$\Sigma x^2 = 782238017$	$\Sigma x^3 = 18242601720$
Para el punto 2	$x = -42178$	$y = 2168$	$x^2 = 1778983684$	$x^3 = -75033973000$
Totales	$\Sigma x = -15961$	$\Sigma y = 26154$	$\Sigma x^2 = 2561222301$	$\Sigma x^3 = -56781371280$

PUNTOS	x ⁴	x ⁵	x ⁶
Para los puntos 3 4 5 y 7	$\Sigma x^4 = 481717429822$	Del cuadro VI sin incluir el punto 6	Del cuadro VI sin incluir el punto 6
Para el punto 2	$x^4 = 3164782947938$		
Totales	$\Sigma x^4 = 3649500377760$	$\Sigma x^5 = -120825772265876$	$\Sigma x^6 = 59636248319984$

PUNTOS	xy	x ² y	x ³ y
Para los puntos 3 4 5 y 7	$\Sigma xy = 238558847$	$\Sigma x^2y = 6480789090$	Del cuadro VI sin incluir el punto 6
Para el punto 2	$xy = -91441904$	$x^2y = 3856836627$	
Totales	$\Sigma xy = 147116943$	$\Sigma x^2y = 10343125717$	$\Sigma x^3y = -3426800175$

Reemplazando en el sistema de ecuaciones (2) antes establecidas y cambiando la por 5a en este caso

$$\begin{aligned} 5\,000\,000a - 15\,961\,000b + 2\,561\,222\,301c &= 261\,540\,000 \\ -15\,961\,000a + 2\,561\,222\,301b - 5\,6791\,371\,280c &= 147\,116\,943 \\ 2\,561\,222\,301a - 5\,6791\,371\,280b + 3\,649\,500\,377\,760c &= 10\,343\,125\,717 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones dan

$$\begin{aligned} a &= 5068\,5 \\ b &= 111\,45226 \\ c &= 1\,01140 \end{aligned}$$

De aqui la ecuacion buscada

$$y = 5068\,5 + 111\,45226x + 1\,01140x^2 \quad (5)$$

El cuadro correspondiente a sus valores calculados seria

CUADRO NUMERO VIII

PUNTOS	AÑOS	POBLACION		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En ‰
2	1870	2 67	2168	1 10	+ 001
	1905	4365	4 55	- 100	- 022
3	1912	5069 5	073	+ 45	+ 009
5	1918	5819 1	3856	+ 69	+ 012
6	1928	7212 4	7851	+ 0 86	+ 885
7	1938	8704 5	8702	- 23	- 005

Los cuatro calculos antes establecidos permiten la formacion del cuadro siguiente para comparaciones

CUADRO NUMERO XIV

PUNTOS CALCULADOS	AÑOS CORRESPONDIENTES	% DE CORRECCIONES EN LOS DATOS CALCULADOS			
		VALORES DE PUNTOS OBTENIDOS		AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS	
		Puntos 4 5 y 7	Puntos 2 4 y 7	Puntos 3 4 5 y 7	Puntos 2 3 4 5 y 7
2 C	1870	+ 354	000	+ 710	+ 004
3 N	1905	- 021	- 034	- 002	- 023
4-D	1912	000	000	+ 004	+ 009
5 M	1918	000	+ 006	- 003	+ 012
6 F	1928				
7 X	1938	000	000	000	- 003
Referencia a los cuadros numeros		VIII	VI	V	III
Referencia a las ecuaciones numeros		(1)	(4)	(3)	(5)
Medio cuadratico en las diferencias absolutas		R = 3459	R = 688	R = 6883	R = 591
Medio cuadratico en los porcentajes		I = 1 85	R = 0 154	R = 0 021 (1) R = 3 15 (2)	I = 0 24
Errores por exceso en la poblacion de 1928		633 500	637 900	600 200	6 8600

(1) Sin incluir el punto C
(2) Incluyendo el punto C

Los medios cuadraticos estan calculados con los numeros absolutos de las diferencias correspondientes a las series de valores de los cinco puntos C N D M y X, y tambien con los numeros de los ‰ que representan dichas diferencias con

cada dato censal correspondiente (Veanse los cuadros VIII, X, XI y XIII)

Para los valores de R correspondientes al cuadro X, se hacen dos calculos en el primero se de carta el punto C con el objeto de cierta comparacion mas adelante explicada, y en el segundo, se incluyen los cinco puntos anteriores

Si ordenamos las dos series de valores de estos promedios, vemos que llevan una misma tendencia para acusar dispersion, con la ventaja, si, de que las series de porcentajes son mas expresivas en cuanto que permiten formar criterio inmediato sobre la buena o mala adaptabilidad de las curvas en estudio, al calculo de los datos censales Creemos, en consecuencia, que es mejor buscar la dispersion de las series con los valores de estos porcentajes, para la eleccion de las mas aceptables En los estudios siguientes, sin embargo, se conservara este mismo orden en los calculos

CONCLUSIONES

1ª La minima dispersion es 0.024 correspondiente a los cuatro ultimos puntos de la serie (3), esta dispersion esta medida por su medio cuadratico, de modo que si solo se tratara de estos cuatro puntos, completamente aislados en el tiempo, la ecuacion (3) correspondiente, antes hallada, seria la mejor interpretacion del crecimiento numerico de la poblacion, la ecuacion es

$$y=5071+112.75165x+0.95492x^2$$

El mayor error absoluto de la poblacion seria de 2,000 habitantes correspondientes al Censo del año de 1912. Ahora bien, si en los Censos de 1905 a 1918 una aproximacion menor del 1% seria muy problematica teniendo en cuenta las epocas y los sistemas empleados en esos levantamientos, la ecuacion anterior, que

difiere de los datos observados solo por centesimos del 1%, sera ideal para calculos intercensales. Al incluir el punto C, que no fue previsto en el ajuste, la dispersion de 3.175 es ya muy elevada, la serie de los cuatro ultimos puntos muestra asi tendencia a exagerar por exceso los datos extrapolados (para la poblacion despues de 1938), y por lo tanto esta serie de aproximacion ideal no sera la llamada a interpretar a cabalidad la ley buscada

2ª En las series (1) y (4) de parabolos por puntos obligados, descontamos la primera con una dispersion diez veces mayor que la segunda, el mayor error absoluto de la poblacion seria de 15,000 habitantes correspondientes al Censo de 1905 (aproximacion -0.34%)

3ª La dispersion de la serie anterior, necesariamente mayor que la de la serie (5), indica que es esta ultima la que debe escogerse

La curva asi obligada tendria

a) Su ecuacion (5)

$$y=5068.5+111.45226x+1.01140x^2$$

b) El mayor error absoluto de la poblacion seria de 10,000 habitantes correspondientes al Censo de 1905 (aproximacion de -0.22%)

c) Para comparaciones posteriores, valdria la pena buscar *datos intercensales* de año en año entre 1905 y 1938, *la rata del crecimiento, el error de la poblacion de 1928, una extrapolacion para los años de 1939 y 1940 y la futura poblacion del Censo de 1948*. Asi lo haremos a continuacion

Los datos intercensales

Esta ultima serie de calculos se haria para una misma fecha del año, escogeriamos el 1º de julio por ejemplo para usar esos valores en la busqueda de los coeficientes demograficos anuales, y asi tendríamos

CUADRO NUMERO XV

PUNTOS	FECHAS Y ABSCISAS ON ORIGEN EN 1912 (MARZO 5)	INTERVALOS DE REDUCCION		Abscisas—Julio 1	Σ²
		Días	Años		
2	1870-Enero 1 — 42.178	+ 182	+ 0.498	- 41.68	1737.2224
3	1905-Junio 15 — 6.723	+ 16	+ 0.044	- 6.68	44.624
4	1912-Marzo 5 0.000	+ 118	+ 0.322	+ 0.32	0.1024
5	1918-Octubre 14 + 6.608	- 103	- 0.288	+ 6.32	39.9424
6	1928-Noviembre 17 + 16.104	- 139	- 0.380	+ 16.32	266.3124
7	1938-Julio 1 + 26.332	- 4	- 0.011	+ 26.32	692.7424

Con estas nuevas abscisas y sus intermedias, en la ecuacion (5), tenemos a continuacion los datos interpolados y de extrapolacion, calculados para la parabola

comun despues de aproximar las centenas a numeros redondos. Vease el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XVI

AÑOS—JULIO 1	Poblacion	AÑOS—JULIO 1	Poblacion	AÑOS—JULIO 1	Poblacion
1905	4 369 100	1921	6 195 100	1937	8 538 900
1906	4 468 100	1922	6 326 400	1938	8 702 600
1907	4 569 100	1923	6 459 700		
1908	4 672 100	1924	6 595 100		
1909	4 777 100	1925	6 732 500		
1910	4 884 100	1926	6 871 900		
1911	4 993 200	1927	7 013 300		
1912 *	5 104 300	1928	7 156 800		
1913	5 217 400	1929	7 302 300		
1914	5 332 500	1930	7 449 800		
1915	5 449 700	1931	7 599 300		
1916	5 568 800	1932	7 750 800		
1917	5 690 000	1933	7 904 400		
1918 *	5 813 300	1934	8 060 000		
1919	5 938 500	1935	8 217 600		
1920	6 065 800	1936	8 377 200		

* Años censales

Rata del crecimiento anual

Es muy comun buscar este crecimiento como una constante anual entre dos censos (crecimientos en progresion aritmetica) o como una cantidad de variacion exponencial con el tiempo (crecimiento en progresion geometrica). Ninguno de estos conceptos corresponde a la realidad de los hechos, en el caso estudiado de la parabola comun

En efecto

Para determinada poblacion y_1 de abscisa x_1 tenemos

$$y_1 = a + bx_1 + cx_1^2$$

y si tomamos otra poblacion y_2 correspondiente a otra abscisa mas adelante ($x_1 + h$), tendremos

$$y_2 = a + b(x_1 + h) + c(x_1 + h)^2$$

Restando $y_2 - y_1 = bh + ch^2 + 2cx_1 h$

Si hacemos $h = 1$ para el incremento anual

$$D_1 = y_2 - y_1 = b + c(1 + 2x_1) \quad (6)$$

La ecuacion (6), procedente de una primera diferencia entre los valores sucesivos de una ecuacion del segundo grado, necesariamente sera del primer grado, e indica

Que el crecimiento de la poblacion es un numero que guarda proporcion con el avance del periodo que se estudia, tomando este ultimo desde determinado

valor fijo (el paso del eje de las ordenadas en este caso)

Una diferencia de segundo orden seria constante, como lo dijimos

Si concebimos una diferencia D'_1 para un valor de $x_1 + h$, hallamos

$$D'_1 = b + c[1 + 2(x_1 + h)]$$

Y por diferencias

$$D_2 = D'_1 - D_1 = 2ch$$

Para $h = 1$

$$D_2 = 2c$$

o sea que la rata del crecimiento varia anualmente en el valor $2c$

Reemplazando ahora las constantes del caso

$$D_1 = 111\,452 + 1\,0114(1 + 2x) \quad (7)$$

$$D_2 = 2\,023 \text{ proximamente} \quad (8)$$

Estas dos relaciones (7) y (8) nos sirven para calcular rapidamente los datos del cuadro XVI, tomandolos en habitantes simplemente y no en miles

Veamos un ejemplo

La poblacion para 1905 y 1906, usando las abscisas -6.68 y -5.68 (cuadro XV), en la ecuacion (5), da

	Habitantes
Para 1905	4,369,130
Para 1906	4,468,081
1ª diferencia	98,951

Con estos tres numeros y la segunda diferencia de $2c = 2,023$ (tomandola no en miles, sino en unidades) se forma rapidamente el cuadro siguiente, cuyos valores aproximados en la primera centena, figuran en el cuadro numero XVI

CUADRO NUMERO XVII

ANOS Y POBLACION	Primeras diferencias	Segundas diferencias
1905 4 269 30	98 951	
1906 4 408 081	100 974	2 023
1907 4 559 055	102 997	2 023
1908 4 722 032	105 020	2 023
1909 4 777 072	107 043	2 023
1910 4 881 115	109 066	2 023
1911 4 903 181	111 089	2 023
1912 5 104 270		

Si calculamos ahora los habitantes de 1912 con ayuda de la ecuacion (5) obtenemos el numero de 5,104,268, en vez de 5 104,270, del cuadro anterior

El error en la poblacion de 1928

La poblacion observada para 1928 (noviembre 17) es

	En miles
Segun el cuadro IV	7851 1
La calculada para noviembre 17, cuadro XIII	7212 4
La calculada para julio 1º, cuadro XVI	7156 8
La observada para 1928, julio 1º, deberia reducirse a	

$$\frac{71\ 68}{7212\ 4} \times 7851\ 1 = 7790\ 6$$

Considerando mas aceptable la poblacion calculada para el 1º de julio, tendremos

	Habitantes
Poblacion observada	7,790 600
Poblacion calculada	7 156 800
Error encontrado	633,800

Extrapolacion para las poblaciones de 1939 y 1940

La futura poblacion en 1948

Aplicando la ecuacion (5) a las abscisas 27 32 y 28 32, correspondientes a los años 39 y 40 (julio 1), obtendremos

	Habitantes
Para 1939	8 868,267
Para 1940	9,035,993
Diferencia	167,726

Con estos tres valores se puede formar un cuadro semejante al numero XVII. Pero tambien se puede partir de la poblacion conocida de 1938 (calculada por la ecuacion (5) y el valor de la primera diferencia para dicho año, así

La abscisa 26 32, en la ecuacion (5), da

Poblacion para 1938 8,702 562

$$D_1 = 111\ 45226 + 1\ 0114(1 + 2x) = 165\ 703$$

$D_2 = 2\ 023$ como antes

O prescindiendo de miles de habitantes, para tomar habitantes solamente, formamos con los numeros

$$\begin{array}{r} 8,702,562 \\ 165,703 \\ 2,023 \end{array}$$

el cuadro siguiente de extrapolaciones

CUADRO NUMERO XVIII

ANOS Y POBLACION	Primeras diferencias	Segundas diferencias
1938 8 702 562		
1939 8 868 265	165 703	2 023
1940 9 035 991	167 726	2 023
1941 9 205 740	169 749	2 023
1942 9 377 512	171 772	2 023
1943 9 551 307	173 795	2 023
1944 9 727 125	175 818	2 023
1945 9 904 936	177 841	2 023
1946 10 084 830	179 864	2 023
1947 10 269 717	181 887	2 023
1948 10 450 677	183 910	2 023

Si calculamos ahora este ultimo valor para 1948 por la ecuacion (5) obtenemos 10,450 626 habitantes. Apenas uno de diferencia

Aqui pudiera dejarse practicamente terminado el estudio de la interpolacion intercensal pero para comparacion de los datos de extrapolacion, lo continuaremos al traves de las otras formas analiticas atras indicadas, y de las cuales podremos obtener mayores aproximaciones todavia

En la extrapolacion es comun obtener mayores datos de los verdaderos, y por esta razon, obtenida de varios modos dentro de formulas que dan interpolaciones aceptables, se tendra como criterio para la eleccion de estas formulas, las que den menor valor en las extrapolaciones, a fin de acercarnos desde un principio a los datos que es posible esperar en el estudio de los calculos por procedimientos de origen racional que veremos mas adelante

ESTUDIO DE LA PARABOLA CUBICA

Ya habiamos dicho que la forma de esta curva correspondia a la ecuacion

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Para comodidad en los calculos,
y—representa poblacion en miles de habitantes,
x tiempo en años con origen en 1912 (marzo 5)

Como en este caso tenemos cuatro constantes es posible formar un sistema de cuatro ecuaciones, lo que nos permite introducir los valores en poblacion y tiempo para los cuatro ultimos censos aceptables, (años de 1905, 1912, 1918 y 1938)

De acuerdo con las experiencias hechas sobre la parabola comun, podemos ensayar con esta tres clases de calculos, asi

1° Una curva que pase por los puntos 3 4, 5 y 7, a fin de ver como se comporta con el punto 2

2° Una curva que pase por los puntos 2 4, 5 y 7, a fin de ver como se comporta con el punto 3

3° Una curva ajustable por el metodo de los minimos cuadrados a los puntos 2, 3, 4, 5 y 7

Veamos estos calculos a continuacion

1° Una curva que pase por los puntos 3 4, 5 y 6

Reemplazando los valores correspondientes del cuadro numero VI en la ecuacion anterior, para los puntos citados tenemos

$$4355 = a - 6723b + 15198/29c - 3038710550d$$

$$5073 = a$$

$$5856 = a + 6608b + 43665664c + 2885427077d$$

$$8702 = a + 26332b + 693374224c + 182579300664d$$

Este sistema resuelto da

$$a = 5073$$

$$b = 11255778$$

$$c = 087764$$

$$d = 000310$$

y por consiguiente

$$y = 5073 + 11255778x + 087764x^2 + 00031x^3 \quad 9)$$

(Calculando para los puntos de 2 a 7 con la ecuacion anterior, resulta el siguiente cuadro

CUADRO NUMERO XIX

PUNTOS Y AÑOS	x	POBLACION		CORRELACIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En %
2 — 1870	— 42178	16542	2168	+ 5138	+ 2370
3 — 1905	— 6723	43550	4355	00	000
4 — 1912	0000	50730	5073	00	000
5 — 1918	6608	58560	5856	00	000
6 — 1928	15704	72125	7851	+ 6385	+ 885
7 — 1938	26332	87020	8702	00	000

Como se ve, a pesar de que la curva pasa exactamente por los puntos 3, 4 5 y 7, presenta gran separacion respecto del punto 2, ello se debe, a veces, a que para el acomodo de los 4 puntos la curva tuvo que formar un punto de inflexion, y otras veces a que no queda bien interpretada la ley censal por la escogencia de los puntos

Lo primero se comprueba facilmente, asi

En la parabola estudiada

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2c + 6dx = 0$$

$$x = -\frac{c}{3d}$$

Y con los valores hallados antes

$$x = -94.37$$

Esta abscisa se retira demasiado de la mayor entre las negativas, que es -42.178 y por tanto el punto de inflexion no es el que deforma la curva para que se retire tanto del punto 2, sino la inclusion del punto 3, como punto obligado. Hay que hacer, por consiguiente, una mejor seleccion de los puntos. Veamoslo

2° Una curva que pase por los puntos 2, 4, 5 y 7

Si siguiendo el proceso antes desarrollado encontrariamos para este caso la ecuacion

$$y = 5073 + 111.9233x + 0.9977x^2 - 0.000044x^3 \quad (10)$$

y para un punto de inflexion

$$x = -\frac{c}{3d} = +61.13$$

Abscisas de 1938 (julio 1°)	26.33
Diferencia	34.80
Sumando con	1938.00
Total	1972.80

De modo que esta deformacion solo ocurriria al final del año de 1972, y no debe marcar influencia entre los puntos estudiados

Como en el caso anterior obtenemos los datos del cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XX

PUNTOS Y AÑOS	POBLACION		CORRECCIONES	
	Calculada	Observada	Absolutas	En %
2 - 1870	2168.0	2168	0.0	0.00
3 - 1905	4365.8	4355	- 10.8	- 0.25
4 - 1912	5073.0	5073	0.0	0.00
5 - 1918	5850.0	5856	0.0	0.00
6 - 1928	7218.4	7851	+ 632.6	+ 8.76
7 - 1938	8702.0	8702	0.0	0.00

La mayor dispersion encontrada en los puntos (excepcion hecha naturalmente del punto (6)) es ahora apenas del -0.25 /

El punto de inflexion, como antes, no esta a la izquierda del eje vertical de coordenadas sino a la derecha

$$x = \frac{-c}{3d} = \frac{0.9977}{-0.001632} = +61.13$$

Este distanciamiento de la inflexion con respecto a las zonas censales en estudio,

no tiene naturalmente influencia sobre las posibles dispersiones de la serie calculada con respecto a la observada

El punto de inflexion marcado en la ecuacion (9) se ha corrido hacia la derecha 155½ años

3° Ajuste por el metodo de los minimos cuadrados para los puntos 2, 3, 4, 5 y 7

Como se estudio en un principio, de la parabola cubica

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

deducimos

$$\Sigma r^2 = \Sigma (a + bx + cx^2 + dx^3 - y)^2$$

E igualando a cero las primeras derivadas con respecto a las cuatro constantes, obtenemos las ecuaciones normales,

$$\left. \begin{aligned} 5a + b\Sigma x + c\Sigma x^2 + d\Sigma x^3 &= \Sigma y \\ a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 + d\Sigma x^4 &= \Sigma yx \\ a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 + d\Sigma x^5 &= \Sigma yx^2 \\ a\Sigma x^3 + b\Sigma x^4 + c\Sigma x^5 + d\Sigma x^6 &= \Sigma yx^3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Reemplazando los valores numericos del cuadro numero XII obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones que se resuelven asi

$$\begin{aligned} a &= 5066.400 \\ b &= 111.6069 \\ c &= 1.01506 \\ d &= 0.000061 \end{aligned}$$

Y por tanto la ecuacion buscada seria

$$y = 5066.4 + 111.6069x + 1.01506x^2 + 0.000061x^3 \quad (12)$$

Reemplazando valores conocidos

CUADRO NUMERO XXI

PUNTOS Y AÑOS	POBLACION		CORRECCIONES	
	Calculada	Observada	Absolutas	En %
2 - 1870	2169.4	2168	- 1.4	- 0.06
3 - 1905	4362.0	4355	- 7.0	- 0.16
4 - 1912	5066.4	5073	+ 6.6	+ 0.13
5 - 1918	5848.2	5856	+ 7.8	+ 0.13
6 - 1928	7213.6	7851	+ 637.4	+ 8.83
7 - 1938	8707.9	8702	- 5.9	- 0.07

El punto de inflexion

$$x = \frac{-c}{3d} = +55.46$$

El factor 0.000061x³ es tan de escasa influencia que al suprimirlo la mayor parte de los terminos de la serie se corrigen. Esto parece indicar la mayor adaptabilidad

dad de las parabolos comunes de segundo grado a la ley censal colombiana desde 1870

Con los datos de los cuadros XIX, XX y XXI se forma el siguiente cuadro resumen

CUADRO NUMERO XXII

PUNTOS CALCULADOS	AÑOS CORRESPONDIENTES	% DE CORRECCIONES PARA LOS DATOS CALCULADOS		
		Parábola de puntos obligados		Ajuste por mínimos cuadrados
		Puntos 3 4 5 y 7	Puntos 2 4 5 y 7	Puntos 2 3 4 5 y 7
2 - C	1870	+ 23,0	0,00	- 0,06
3 - A	1905	0,00	- 0,25	- 0,16
4 - D	1912	0,00	0,00	+ 0,13
5 - M	1918	0,00	0,00	+ 0,13
6 - E	1928			
7 - X	1938	0,00	0,00	- 0,07
Referencia a los cuadros numeros		XIX	XX	XXI
Referencia a las ecuaciones numeros		(9)	(10)	(12)
Medio cuadrático en las diferencias absolutas		R=229,77	R= 483	R= 616
Medio cuadrático en los porcentajes		R=10,598	R=0,112	R=0,115
Errores por exceso en la población de 1928		638 500	632 600	637 400

Si observamos la disminucion continua que se viene presentando en el valor del medio cuadrático, si se puede concluir que la forma de la parabola cubica interpreta mejor la distribucion de errores, que la de las parabolos comunes de segundo grado

Rata de crecimiento anual

Como en el caso de la parabola comun, sean

$$y_1 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$y_2 = a + b(x + 1) + c(x + 1)^2 + d(x + 1)^3$$

La primera diferencia

$$D_1 = y_2 - y_1 = (b + c + d) + x(2c + 3d + 3dx^2)$$

La segunda diferencia seria

$$D_2 = (2c + 6d) + 6dx$$

Y la tercera diferencia

$$D_3 = 6d$$

Reemplazando los valores de las constantes

$$D_1 = 112,6219 + 1,01506x - 0,000061x^2 \quad (13)$$

$$D_2 = 2,029754 - 0,000366x$$

$$D_3 = -0,000366$$

La ecuacion (13) en este caso representa el crecimiento de la población, de modo que

La rata del crecimiento anual de la población cuando esta interpretada por la parabola cubica, corresponde a las ordenadas de una parabola comun (ecuacion 13), cuyas abscisas representan el tiempo en que se toma cada crecimiento, contado desde determinado punto fijo

Si observamos lo pequeño de los coeficientes 0,000061 y 0,000366, vemos como la segunda diferencia trata de ser una constante, y la primera diferencia toma la expresion del crecimiento en linea recta como en el caso de la parabola comun

Los datos intercensales

Extrapolacion para los años de 1939 y 1940

La futura población de 1948

Es sistema muy expedito para calcular los resultados de la ecuacion (12) el uso de las diferencias ya establecidas. Haciendo uso de una población inicial, como la de 1905, por ejemplo, y sus tres diferencias sucesivas puede llegarse por simples sumas a obtener la de todos los años sucesivos hasta 1940, por ejemplo. Debido a

la falta de precision en los valores de las *diferencias*, cuando se toman en numeros aproximados, se llega al final con errores que no alcanzan a unos 500 habitantes, pero para ser mas precisos, si se quiere, basta usarlas recalculando tanto la poblacion como *las diferencias*, por las ecuaciones correspondientes en periodos mas cortos, cada cinco o diez años, por ejemplo, en nuestro caso, en cada año

censal Todo lo cual se detalla a continuacion, tomando para los años censales y los siguientes, las abscisas del cuadro XV, que implican una reduccion de la poblacion al 1° de julio de cada uno de ellos

Con la ecuacion (12) y los valores D_1 , D_2 y D_3 multiplicados por 1000 se calcula el renglon de 1905, y luego los demas se deducen por simples sumas Lo mismo para los otros años censales

CUADRO NUMERO XXIII

AÑOS	POBLACION	D_1	D_2	D_3	OBSERVACIONES
1905	4336178	93054	20322	- 00001	Valores calculados Valores deducidos
1906	4465232	101086	20318		
1907	4566318	103117	20314		
1908	4669435	105118	20310		
1909	4774583	107179	20306		
1910	4881762	109209	20302		
1911	4990971	111239	20298		
1912	5102210	113268	20294		
1912	5102218	113271	20296	- 00004	Valores calculados Valores deducidos
1913	5215489	115300	20292		
1914	5330789	117319	20288		
1915	5448118	119357	20284		
1916	5567475	121385	20280		
1917	5688860	123413	20276		
1918	5812273	125440	20272		
1918	5812285	125444	20274	- 00001	Valores calculados Valores deducidos
1919	5937729	127471	20270		
1920	6065200	129498	20266		
1921	6194698	131524	20262		
1922	6326222	133550	20258		
1923	6459712	135575	20254		
1924	6595347	137600	20250		
1925	6732917	139625	20246		
1926	6872572	141649	20242		
1927	7014221	143673	20238		
1928	7157894	145696	20234		
1928	7157913	145702	20238	- 00004	Valores calculados Valores deducidos
1929	7303615	147725	20234		
1930	7451340	149748	20230		
1931	7601088	151771	20226		
1932	7752859	153793	20222		
1933	7906652	155815	20218		
1934	8062467	157836	20214		
1935	8220303	159857	20210		
1936	8380160	161878	20206		
1937	8542038	163898	20202		
1938	8705926	165918	20198		
1939	8871854	167937	20194		
1940	9039791	169956	20190		
					Calculo 8 05 57 Valor deducido Calculo 9 05 822

Para 1948 directamente de la ecuacion (12) deducimos

1918	10 136 021	abscisa 3632	Valor calculado
------	------------	--------------	-----------------

El error de la poblacion de 1928

Siguendo el mismo orden de calculos antes expuesto

La poblacion observada para 1928 (no viembre 17) es segun el cuadro IV 78511

La calculada para (noviembre 17) Cuadro XXI 72136

La calculada para 1928 (julio 1°) Cuadro XXIII 71579

La observada para julio 1° de beria reducirse a

$$\frac{71579}{72136} \times 78511 = 77905$$

Finalmente tendríamos

Reduccion de la poblacion para tomarse como observada en julio 1°	7 790 500
Poblacion calculada	7 157 900
Error encontrado	632 600

Nos falta ahora para terminar el estudio de las formulas empiricas, seguir con el de la parabola logaritmica que, segun Pearl, dara una mayor aproximacion de ajuste de los datos censales que las formas geometricas anteriores (las parabolas comun y de tercer grado)

ESTUDIO DE LA PARABOLA LOGARITMICA

Se ha considerado esta curva como la que da mayor aproximacion entre las de origen empirico, para representar los cambios del crecimiento organico y por extension los relativos a la poblacion. Su ecuacion es de la forma

$$v = a + bx + cx^2 + d \text{ Log } x$$

(Logaritmo comun)

Los ejes de coordenadas han de tener como origen el punto D —Lamina II— por las razones antes explicadas, y el eje de y corresponde al 1° de enero del año de 1868. Esta posicion fue escogida tomando del año de 1870 (primer punto del estudio) hacia atras, un numero de años cualquiera, dos en este caso, para evitar abscisas negativas, que no tienen logaritmo.

Para precisar la forma de la curva tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = b + 2cx + \frac{Md}{x} \text{ siendo } M = 0.1342944,$$

el modulo para transformacion de los logaritmos del sistema comun

Para maximum o minimum

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

O sea la ecuacion

$$2cx^2 + bx + Md = 0, \text{ que da}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8cMd}}{4c} \quad (14)$$

Para punto de inflexion

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2c - \frac{Md}{x^2} = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{Md}{2c}} \quad (15)$$

Ademas, para $x = 0$, $y = -\infty$ lo que indica que el eje de y es una asintota de la curva.

Al encontrar el valor de los parametros de la curva se podra precisar la existencia de los puntos que marcan las expresiones (14) y (15), y la parte del eje de y, que sirve de asintota a la curva.

Con las experiencias hechas en las curvas anteriores sobre la eleccion de puntos censales para el paso o el ajuste de las mismas, parece evidente que solo es necesario hacer estos dos calculos

- 1° Una curva que pase por los puntos 2, 4, 5 y 7
- 2° Una curva ajustada a los puntos 2, 3, 4, 5 y 7

CALCULOS PRELIMINARES

Para facilitar los calculos necesarios al estudio de estas dos curvas, precisa preparar el cuadro siguiente

Tomando los valores del cuadro numero V para abscisas y ordenadas, tendremos

CUADRO NUMERO XXIV

UN TOS		x^2	x^3	x^4
1	0 000			
2	2168	4 000000	8 000000	16 000000
3	4355	1402 877025	525 14 758971	1 968063 947773
4	5073	1951 695684	80222 011928	3 809116 042944
5	5856	2579 217796	130388 154988	6 652364 439203
7	8702	4971 660100	350551 753651	24 717404 149932
$\Sigma y=26154 =204 929$		$\Sigma x^2=10909 450505$	$\Sigma x^3=620314 679538$	$\Sigma x^4=37 1469615,9352$

$\log x$	$\log^2 x$	$x \log x$	$x^2 \log x$
0 301030	0 090619	0 602060	1 204120
1 53510	2 475934	58 935817	2207 441070
1 645206	2 706703	72 581911	3210 941450
1 705744	2 909563	86 627915	4399 485780
1 848251	3 416032	130 320178	9188 875751
$\Sigma \log x=7 073741$	$\Sigma \log^2 x=11 598851$	$\Sigma x \log x=349 167881$	$\Sigma x^2 \log x=19007 947627$

yx	yx^2	$y \log x$
4336 000000	8672 000000	652 633040
163116 525000	6 109529 443875	6852 636050
224114 994000	9 900952 204932	8346 130038
297402 816000	15 103899 413376	9988 836864
613578 020000	43 263386 190200	16083 480202
$\Sigma yx=1 302548 355000$	$\Sigma yx^2=74 386439 202383$	$\Sigma y \log x=41923 16194$

1.º Una curva que pase por los puntos 2, 4, 5 y 7

Con los datos del cuadro anterior en la ecuacion de la parabola logaritmica, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2168 &= a + 2 000b + 4 000000c + 0 301030d \\ 5073 &= a + 44 178b + 1951 695684c + 1 645206d \\ 5856 &= a + 50 786b + 2579 217796c + 1 705744d \\ 8702 &= a + 70 510b + 4971 660100c + 1 848251d \end{aligned}$$

Este sistema se resuelve en los siguientes valores

$$\begin{aligned} a &= 2138 8 \\ b &= 26 989746 \\ c &= 0 972739 \\ d &= 95 205770 \end{aligned}$$

y por consiguiente la ecuacion buscada es

$$y=2138 8+26 9897x+0 97274x^2 - 95 206 \log x \quad (16)$$

Calculando valores de poblacion obtenemos el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XXV

PUNTOS Y AÑOS	POBLACION		CORRECCIONES	
	Calculada	Observada	Absolutas	En %
2-1870	2168 0	2168	0 0	0 00
3-1905	4364 5	4355	-9 5	-0 22
4-1912	5073 0	5073	0 0	0 00
5-1918	5856 0	5856	0 0	0 00
6-1928	7217 4	7851	+633 6	+8 78
7-1938	8702 0	8702	0 0	0 00
Medio cuadratico (1)			R=4 248	R=0 098

(1) Sin incluir los valores del punto 6

FORMA DE LA CURVA

Determinado ya el valor de los parametros es facil construir la curva, con el calculo de algunos puntos intermedios, y el de los valores (14) y (15) antes de terminados

Puntos de maxima y minima

La expresion (14) da, reemplazando valores

$x=1 39$, que corresponde a la tangente horizontal de la curva (Vease figura 2)

Asintotas

Para $x=0$, como el valor de d es negativo obtenemos $v=\infty$, es decir el eje vertical de coordenadas, en su parte positiva encima del eje de x es una asintota. De todo lo cual se concluye que la forma de la curva es la indicada en figura 2

Como se ve, la rama de la curva a la derecha del punto de inflexion es la que se utiliza para la interpretacion del desarrollo de la poblacion, y con una posicion superior a la que han dado hasta ahora las curvas anteriores, segun se muestra en el cuadro numero XXV

Para terminar el estudio de las curvas empiricas solo resta ahora calcular el ajuste de esta parabola por el metodo de los minimos cuadrados

2° Una curva ajustada a los puntos 2, 3, 4, 5 y 7

De acuerdo con el procedimiento antes indicado

$$\Sigma r^2 = \Sigma (a + bx + cx^2 + d \log x - v)^2$$

Desarrollando las expresiones

$$\Sigma f'(a) = 0, \Sigma f'(b) = 0 \text{ etc.},$$

para los cuatro parametros, con las coordenadas de los cinco puntos escogidos se obtiene el sistema

$$\left. \begin{aligned} 5a + b\Sigma x + c\Sigma x^2 + d\Sigma \log x &= \Sigma y \\ a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 + d\Sigma x \log x &= \Sigma yx \\ a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 + d\Sigma x^2 \log x &= \Sigma yx^2 \\ a\Sigma \log x + b\Sigma x \log x + c\Sigma x^2 \log x + d\Sigma \log^2 x &= \Sigma y \log x \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Reemplazando los valores respectivos del cuadro numero XXIV se obtienen cuatro ecuaciones de primer grado, de donde se deducen los valores

$$\begin{aligned} a &= 2160.2 \\ b &= 31.7672 \\ c &= 0.93872 \\ d &= -197.624864 \end{aligned}$$

Y por consiguiente la ecuacion buscada

$$v = 2160.2 + 31.767x + 0.9387x^2 - 197.625 \log x \quad 18$$

Calculando los valores de la poblacion, obtenemos el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XXVI

PUNTOS Y AÑOS	POBLACION		CORRECCIONES	
	Calculada	Observada	Absolutas	En %
2-180	2168.0	2168	0.0	0.00
3-1905	4355.9	4355	-0.9	-0.02
4-191	5070.5	5073	+2.5	+0.05
5-1918	5857.5	5856	-1.5	-0.03
6-1928	7220.1	7851	+630.6	+8.73
7-1938	8101.7	8102	+0.3	+0.00
Medio cuadratico (1)			R=-1.371	R=0.028

(1) Sin incluir los valores del punto 6

Si observamos el punto de ordenada minima, los de inflexion y el ramal asintotico, veremos que esta curva tiene la

misma forma de la de la figura 2 En efecto

Para $x = \frac{+}{-} \sqrt{\frac{Md}{2c}}$, siendo d negativo y c positivo, no existen puntos de inflexion

Para un minimo la expresion (14) da $x=2.37$ Un poco avanzado del principio del año de 1870 (abril 13)

Ademas para $x=0$ como el valor de d es negativo, la parte positiva del eje de y sirve de asintota a la curva

La forma de esta curva no es siempre parabolica como se ve en estos dos ejemplos, ella se presta a tener puntos de inflexion cuando d y c son del mismo signo, y puede tener como asintota la parte negativa del eje de y , tal ocurre en la ecuacion antes transcrita para la poblacion de los Estados Unidos entre los decenios de 1790 a 1910, la ecuacion obtenida ajustando por el sistema de los minimos cuadrados, fue

$$y = 9.061900 - 6.281430x + 8.12377x^2 + 19.829500 \log x$$

y se cuenta en millones de habitantes, y x , en decenios

En este caso la expresion (14) para puntos de maxima o minima no da valor real

alguno, y en cambio como d y c son del mismo signo, existe un punto de inflexion para la abscisa $x=2.26$

Como d es positivo para $x=0$, $y=-\infty$

Todas estas características corresponden a la curva trazada en la figura 3

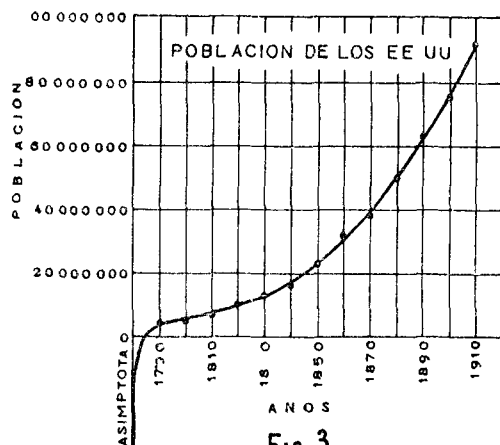


Fig 3

Volviendo ahora a continuar el estudio de las dos ultimas curvas calculadas, podremos formar el siguiente resumen con los datos de los cuadros numeros XXV y XXVI

CUADRO NUMERO XXVII

LUNOS CALCULADOS	AÑOS CORRESPONDIENTES	% DE CORRECCION PARA LOS DATOS CALCULADOS	
		Puntos obligados	Ajuste por minimos cuadrados
		Puntos 2 4 5 y 7	Puntos 2 3 4 5 y 7
2 - C	1870	0.00	0.00
3 - N	1905	- 0.22	- 0.02
4 - D	1912	0.00	+ 0.05
5 - M	1918	0.00	- 0.03
6 - F	1928		
7 - X	1938	0.00	0.00
Diferencia a los cuadros numeros		XXV	XXVI
Referencia a las ecuaciones numeros		(16)	(18)
Medio cuadrático en las diferencias absolutas		R=1.248	I=1.371
Medio cuadrático en los porcentajes		R=0.098	I=0.028
Frente por exceso en la poblacion de 1928		633.600	630.600

La segunda de estas series, con diferencias apenas entre el 2 y el 5 por mil, representa una aproximacion exagerada, que tal vez no es posible conseguir con nin

guna otra clase de metodos para los datos intercensales y de extrapolacion

Terminaremos, a continuacion, con los datos similares a los estudios anteriores

sobre la *rata del crecimiento*, los *datos intercensales* y de *extrapolacion*, la *futura poblacion para 1948* y el *error en la poblacion de 1928*

Rata de crecimiento anual

Cambiando a x por $x+1$ en la ecuacion de la parabola logaritmica y restando la ecuacion primitiva, encontramos para una primera diferencia anual

$$D_1 = b + c + 2cx + d \log \frac{x+1}{x}$$

Esta seria la expresion de la rata de crecimiento, una funcion de forma logaritmica, que tratada continuamente para hallar una segunda, tercera, etc., diferencias, nunca se llegara a obtener un valor constante como en los casos anteriores

En efecto la segunda derivada de una ecuacion de segundo grado es constante e igual a la *segunda diferencia*, y en general para una ecuacion de grado n la derivada de orden n es constante e igual a la diferencia de ese mismo orden

En la parabola comun por ejemplo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2c = D_2, \text{ como lo vimos antes}$$

En la parabola cubica

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 6d = D_3$$

En el caso de la parabola logaritmica tendríamos

CUADRO NUMERO XXVIII

LUNOS	Fechas y abscisas con origen en 1808 (Enero 1)			INTERVALO DE REDUCCION		Abscisas (julio 1)	x ²
				Dias	Años		
2	1870-Enero	1	2000	+ 187	+ 0.498	25	6.25
3	1905-Junio	15	37.155	+ 16	+ 0.044	37.5	1406.25
4	1912-Marzo	5	44.178	+ 118	+ 0.372	44.5	1980.25
5	1918-Octubre	14	50.786	- 105	- 0.788	50.5	2550.25
6	1928-Noviembre	17	60.880	- 139	- 0.320	60.5	3660.25
7	1938-Julio	5	70.510	- 4	- 0.011	70.5	4970.25

Con estos valores, sus intermedios y otros subsiguientes en la ecuacion (18), obtenemos el siguiente y definitivo cuadro de interpolaciones, haciendo uso de la mas aproximada entre las formulas empiricas para este objeto. Se exponen ademas en di-

cho cuadro una reduccion de la poblacion observada para julio 1° de cada año censal, las series de valores calculados por las parabolas de 2° y 3° grados, y las mayores diferencias de estas dos series con la correspondiente a la parabola logaritmica

$$f'(x) = b + 2cx + \frac{Md}{x}$$

$$f''(x) = 2c - \frac{Md}{x^2}$$

$$f'''(x) = + \frac{2Md}{x^3}$$

Y facilmente se llega a demostrar que

$$f(x) = \frac{Md}{x} \left[(n-1) 1 2 3 \dots (n-2) \right]$$

Esta ultima expresion tiene signo positivo o negativo, segun que n sea impar o par, y solo es aplicable para derivadas del tercer orden en adelante. Como se ve, no siendo posible encontrar una derivada de valor constante, no podra hallarse una *diferencia* igualmente constante para usarla como antes, en los calculos de poblacion de año en año. Hay necesidad de usar el valor de las abscisas directamente de la ecuacion del caso

Los datos intercensales

Extrapolacion para los años de 1939 y 1940

La futura poblacion de 1948

Con las abscisas especiales ya conocidas para la parabola logaritmica (cuadro numero XXIV), se prepara una reduccion a julio 1° de cada año como en los casos anteriores. En el cuadro siguiente se muestra esa reduccion

CUADRO NUMERO XXIX

AÑOS	POBLACION--PARABOLA LOGARITMICA		Parabola comun Julio 1 (2)	Parabola cubica Julio 1 (3)	Mayores diferencias de la serie (1) con las series (2) y (3)	
	Calculada Julio 1 (1)	Observada				
1905	4 360 440	4 355 477 (Junio 15)	4 350 980 (Reduccion a julio 1)	4 369 130	4 366 180	- 8 690-(?)
1906	4 461 290			4 468 080	4 465 230	-8 790-(2)
1907	4 564 080			4 569 060	4 566 320	- 4 980-(2)
1908	4 668 790			4 672 050	4 669 440	- 3 260-(2)
1909	4 775 440			4 777 070	4 774 580	- 1 630-(2)
1910	4 884 010			4 884 120	4 881 760	+ 2 250-(3)
1911	4 994 510			4 993 180	4 990 970	+ 3 540-(3)
1912	5 106 940	5 072 004 (Marzo 5)	5 106 020 (Reduccion a julio 1)	5 104 270	5 102 220	+ 4 720-(3)
1913	5 221 280			5 217 380	5 215 490	+ 5 790-(3)
1914	5 337 540			5 332 520	5 330 790	+ 6 750-(3)
1915	5 455 720			5 449 680	5 448 120	+ 7 600-(3)
1916	5 575 810			5 568 860	5 567 480	+ 8 330-(3)
1917	5 697 820			5 690 050	5 688 860	+ 8 960 (3)
1918	5 821 740	5 855 777 (Octubre 14)	5 819 990 (Reduccion a julio 1)	5 813 290	5 812 290	+ 9 450 (3)
1919	5 947 570			5 938 540	5 937 730	+ 9 840-(3)
1920	6 075 310			6 035 810	6 065 200	+ 10 110-(3)
1921	6 204 960			6 195 110	6 194 700	+ 10 260-(3)
1922	6 336 520			6 326 430	6 326 220	+ 10 360-(3)
1923	6 459 990			6 459 770	6 459 770	+ 10 220-(2 3)
1924	6 605 350			6 595 150	6 595 350	+ 10 220 (?)
1925	6 742 630			6 732 520	6 732 950	+ 10 110-(2)
1926	6 881 800			6 871 930	6 872 570	+ 9 870-(2)
1927	7 022 880			7 013 370	7 014 220	+ 9 510-(2)
1928	7 165 860	7 851 110 (Noviembre 17)	7 791 420 (Reduccion a julio 1)	7 156 820	7 157 910	+ 9 040-(?)
1929	7 310 740			7 302 300	7 303 620	+ 8 440 (2)
1930	7 457 520			7 449 810	7 451 340	+ 7 710-(2)
1931	7 606 210			7 599 330	7 601 090	+ 6 880 (?)
1932	7 756 790			7 750 880	7 752 860	+ 5 910 (2)
1933	7 909 260			7 901 450	7 906 650	+ 4 810-(2)
1934	8 063 640			8 050 050	8 062 470	+ 3 590-(2)
1935	8 219 910			8 217 670	8 220 300	+ 2 240-(2)
1936	8 378 080			8 377 310	8 380 160	- 2 080-(3)
1937	8 538 140			8 538 970	8 542 040	- 3 900 (3)
1938	8 700 100	8 701 816 (Julio 5)	8 700 220 (Reduccion a julio 1)	8 702 560	8 705 910	- 5 840-(3)
1939	8 853 950			8 858 270	8 871 850	- 7 900-(3)
1940	9 029 700			9 035 990	9 039 790	- 10 090 (3)
1948	10 423 820			10 450 630	10 456 020	- 32 200-(3)

CONCLUSIONES

Terminado así el estudio de las formulas empiricas propuestas, resumimos todo lo anterior en las siguientes conclusiones

1ª Las ecuaciones escogidas en cada caso serian las siguientes, obtenidas por ajustes segun el sistema de los minimos cuadrados

Para la parabola comun

$$y=5068.5+111.45226x+1.01140x^2$$

Para la parabola cubica

$$y=5066.4+111.6069x+1.01506x^2-0.000061x^3$$

Para la parabola logaritmica

$$y=2160.2+31.767x+0.9397x^2-197.625\log x$$

En la segunda de estas tres curvas hay un punto de inflexion, y las otras dos presentan un punto de ordenada minima

2ª Las diferencias de la poblacion calculada con la observada son cada vez menores, cuando se toman en su orden la parabola de 2º grado, la de 3º y la parabola logaritmica, los *medios cuadraticos* de las series formadas por estas diferencias, tomados en valor absoluto y en %, dan estos resultados

	Medio absoluto	Medio cuadratico en %
Parabola comun	R=5.91	R=0.121
Parabola cubica	R=6.16	R=0.115
Parabola logaritmica	R=1.37	R=0.028

Es pues mas sensible el *medio cuadratico* de los % para medir la mejor adaptacion

tabilidad de las curvas a los valores censales, que el obtenido con las diferencias de las series tomadas en valores absolutos

3ª La mejor aceptacion que merece la parabola logaritmica, para los fines perseguidos, esta claramente determinada en el cuadro XXIX, al comparar la poblacion calculada de los años 1905, 1912, 1918 y 1938, con la poblacion observada reducida a julio 1º las diferencias son insignificantes, la mayor de ellas en el año de 1912, es apenas de 2,080 habitantes (si se prescinde naturalmente del año de 1928)

Las mayores diferencias para los datos intercensales de las series (2) y (3) alcanzan un valor maximo de + 10,300 en el año de 1922, bien pequeño en verdad comparado con una poblacion mayor de seis millones de habitantes

4ª Datos de extrapolacion —Ya vimos que de las curvas tratadas solo la parabola cubica presenta puntos de inflexion, pero la curva escogida desarrolla esta modalidad en la abscisa + 5546, es decir, con un alejamiento de la realidad dentro del tiempo, que no es posible tomarle en cuenta para los fines de estos calculos. Los puntos de inflexion en determinado lugar de la curva, le hacen apta para una interpretacion mas racional de los movimientos extracensales, como lo veremos mas adelante al tratar de la *curva logistica*, que en un principio es convexa con relacion al eje de x y despues del punto de inflexion, concava, en el ramal correspondiente a las zonas extracensales. Las cur-

vas estudiadas, en cambio, tienen estas zonas localizadas en la parte convexa de las mismas, y hay una tendencia, por lo tanto, de crecimiento en los datos extracensales por encima de los valores que deberian considerarse como los mas racionales. Consecuencia obligada de esta observacion seria, entonces, elegir para la extrapolacion la curva que presente los menores valores, que en nuestro caso corresponde precisamente a la parabola logaritmica segun puede verse en el cuadro numero XXIX

5ª Con los datos del cuadro anterior se forma el grafico de la figura 4, que nos permite juzgar rapidamente como se entrelazan las tres curvas estudiadas y se hace mas visible la tendencia del crecimiento rapido en los valores de la extrapolacion

Sea en efecto la linea horizontal A F Fig 4, sobre la cual tomamos las abscisas correspondientes al tiempo desde el año de 1905 en adelante, si en cada abscisa levantamos una ordenada de valor proporcional a cada uno de los correspondientes a la ultima columna del cuadro XXIX se obtiene, uniendo los extremos sucesivos de estas ordenadas la curva que corta el eje horizontal en los puntos B y D. Las ordenadas de los puntos A y F, y la del punto C (ordenada maxima) forman con la curva trazada cuatro zonas, señaladas sucesivamente con los numeros (2), (3), (2), (3), con lo cual se indica que corresponden a mayores valores de las diferencias entre las cifras adoptadas (ordenadas de

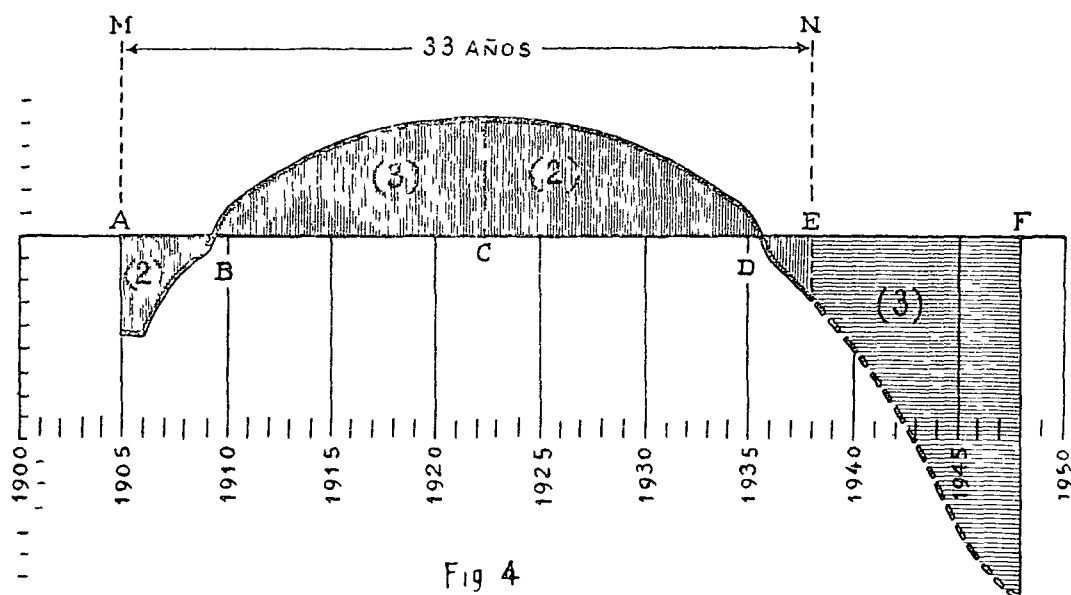


Fig 4

la parabola logaritmica) y las de las series marcadas en el cuadro XXIX con dichos numeros. Por ello es evidente que la parabola comun corta a la logaritmica en los puntos B y D, en cambio en la parabola cubica estos mismos puntos de interseccion estan un poco atras de los anteriores, entre los años 1908-1909 cerca del punto B, y los años 1934-1935 cerca del punto D.

Hay cierta simetria de la curva con relacion al eje horizontal, entre los puntos A y E que abarcan 33 años de observacion censal, esta simetria se pierde rapidamente al iniciarse el periodo extracensal entre las ordenadas que parten de los puntos E y F, entre ellos se desarrolla la zona que caracterizamos antes como de tendencia al crecimiento exagerado, por aumento muy rapido en los valores de las ordenadas correspondientes.

6ª Finalmente, y como conclusion definitiva del estudio correspondiente a las formulas empiricas, se recomiendan los valores computados por la parabola logaritmica del cuadro XXIX, para todos los calculos de poblacion intercensal de los 33 años que limitan las fechas 1905-1938 y para las extrapolaciones correspondientes en el proximo decenio 1938-1948. Asi que, los demografos de 1948 deben orientar sus conclusiones sobre una poblacion muy cercana al dato que aqui registramos de 10,424,000 en numeros redondos, para dicho año.

B) FORMULAS DE ORIGEN RACIONAL

Los estudios antes expuestos sobre el establecimiento de formulas empiricas para interpretar el crecimiento numerico de la poblacion, entre datos aislados de la observacion cuantitativa del fenomeno, nos capacitan suficientemente para dejar resuelto el problema de la interpolación intercensal, de los datos de poblacion necesarios para el calculo de coeficientes demograficos anuales, a fin de observar las tendencias generales de estas series. Pero estas aproximaciones empiricas no explican satisfactoriamente la ley del cambio del crecimiento de la poblacion, ya que, como lo demostramos, esas ratas de crecimiento presentan expresiones matematicas de diversa indole, sin que se ajusten a una ley funcional definida. Para cada forma empirica adoptada existe una rata de cambio, que si se ajusta con gran aproximacion a los hechos reales observa-

dos, en cambio, tomadas en conjunto, presentan entre si expresiones sumamente diferentes, sin analogias, ni forma visible de una relacion que las interprete y generalice. No pueden considerarse, por lo tanto, como una expresion matematica del cambio del crecimiento numerico del fenomeno.

El filosofo T. R. Malthus, conocido en el mundo cientifico por su celebre teoria del crecimiento de la poblacion en forma de una funcion exponencial, y su exposicion sobre la capacidad maxima de la expansion de esta poblacion en un area limitada, sienta las primeras bases para acometer la investigacion de una ley funcional entre el crecimiento de la poblacion y el tiempo, como variables de una ecuacion fundamental.

Estos temas inquietaron a principios del siglo pasado al celebre astrónomo belga Adolfo Quetelet, llamado con justicia el Padre de la Estadística Moderna, quien anuncio la posibilidad de establecer estas relaciones en forma absolutamente deductiva, como toda ley de origen racional, y a instancias suyas, en 1838 el profesor de la Escuela Militar belga, P. E. Verhulst, publico su primera memoria seguida de otras dos despues, donde se planteaba de manera logica el metodo racional para el calculo del crecimiento numerico de la poblacion humana.

La funcion matematica obtenida corresponde a la forma de la curva conocida con el nombre de *logistica* y cuya ecuacion se presenta generalmente asi:

$$y = \frac{be}{1 + ce} \quad (19)$$

o mas simplificada aun

$$y = \frac{k}{1 + me^{-x}} \quad (20)$$

y representa la poblacion en un momento dado y x el tiempo.

Se ha cambiado la denominacion de las constantes porque el valor k tendra una significacion importante en la discusion de estas expresiones, lo mismo que el valor a que se ha cambiado por ϵ .

De manera intencional hemos adelantado la solucion de este problema a su desarrollo, para hacer honor al profesor Raymond Pearl, Vicepresidente de la Comision de Estadística del VIII Congreso Científico Americano actualmente reunido en Washington (mayo de 1940), quien con

admirable intuición, después de exponer los factores que por lo menos se deberían de tener en cuenta para el establecimiento de la teoría matemática sobre el crecimiento de la población, concluye diciendo que puede tomarse como una primera aproximación para dicho objeto la expresión matemática de la curva logística, transcrita en la ecuación (20) (*Studies in Human Biology* por R. Pearl, edición de 1924)

Por demás esta agregar que el profesor Pearl no conocía los estudios de Verhulst, que determinan la misma expresión matemática indicada por Pearl, y así lo vamos a ver más adelante

La curva logística o *curva de cálculo*, tiene la forma dibujada en la figura 5

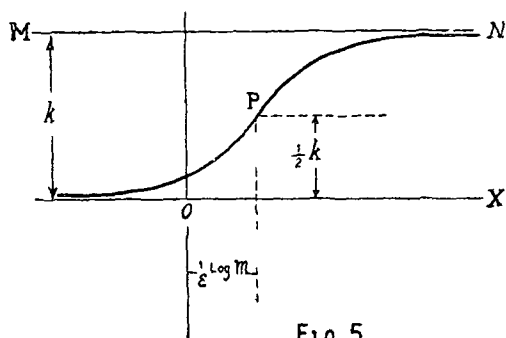


Fig 5

O, es el origen de coordenadas. Las líneas MN y OX (eje de x) son asíntotas a la curva

P, es un punto de inflexión

Adelantamos este conocimiento para exponer a continuación un resumen de los cinco puntos o factores que al menos deben tenerse en cuenta al establecer una fórmula que relacione la población con el tiempo, según el profesor Pearl

Ellos se pueden extraer como sigue

1 El área grande o pequeña donde se estime el desarrollo de una población debe ser limitada. El límite superior de esta área será desde luego una cantidad finita, y corresponderá a la superficie *habitable* de la tierra, o sea donde la población humana pueda crecer y desarrollarse

2 Así como hay un *límite superior* para el área que puede ser habitada, también lo habrá para la población que allí pueda desarrollarse aun teniendo en cuenta los futuros progresos en la producción y calidad de los productos agrícolas y otros elementos necesarios para el sustento de la persona humana. Ello es evidente en

realidad, física y biológicamente hablando sin tener en cuenta nuestra limitación, de los conocimientos en la física, pues no es posible cambiar la naturaleza de estos hechos con ninguna clase de descubrimientos. El mayor o menor avance en el campo de los descubrimientos hará variar la magnitud de este límite, pero no más, el seguirá siendo esa realidad finita que han consagrado los pensadores, que desde Malthus para acá han profundizado en el problema de la población humana

3 El límite inferior de la población es cero. La población negativa no puede concebirse como tal, si se estudia el problema en el campo práctico de los hechos

4 La historia del mundo nos enseña que cada grado de avance en el nivel cultural de la humanidad ha venido creando una posibilidad más para el aumento de la población que puede vivir en un área determinada, en la edad de la pesca y de la caza, el número de personas que pudieron vivir en determinada área debió ser muy bajo, en el estado pastoril hubo de aumentarse, aunque poco relativamente, y más tarde en la época de la agricultura debió crecer visiblemente, de acuerdo con las nuevas posibilidades para la vida. El estado comercial y el industrial de la cultura moderna permiten ya una población con mayor número de habitantes, siempre que (y esto es importante) haya además otras áreas vecinas menos pobladas que puedan producir sus medios de subsistencia en exceso de las necesidades locales. En resumen, cada unidad geográfica de la población, que ha tenido una larga duración, ha pasado por una serie de periodos o ciclos sucesivos de aumentos de población. Esos periodos, espaciados en el tiempo, según las circunstancias que los acompañaron, se presentan en forma de ondas superpuestas y sucesivas, cuya duración señalan las épocas que han venido marcando el desarrollo del nivel cultural, y son características de algunos pueblos viejos y luchadores, que pueden presentar un largo record de observaciones en su población

5 Dentro de cada época cultural o ciclo del crecimiento de la población, la tasa no ha sido constante. El principio de este crecimiento es lento y después de otro cada vez mayor, se llega al fin a un máximo. Es el punto de equilibrio entre los recursos de un área y las necesidades de la población. De allí en adelante, la tasa del crecimiento empieza a rebajar,

se ha llegado pues, a un punto de inflexion. La rata rebaja ahora cada vez mas, y finalmente la curva sigue una linea sensiblemente horizontal de aproximacion continua a la asintota superior de la epoca a que pertenece cada ciclo cultural.

Son estos los factores o postulados que se deben tener en cuenta para establecer una teoria matematica del crecimiento de la poblacion. Se resumen asi estos postulados

- 1 Una area finita y limitada
- 2 Una asintota que marque el limite superior de la poblacion
- 3 Asintota para el limite inferior de la poblacion que debe ser igual a cero
- 4 Caracter ciclico del crecimiento en diversas epocas culturales, y cada ciclo debe marcar aumentos continuos de la poblacion general que se determina
- 5 Forma sigmoidal, simple o compuesta, de la curva del crecimiento. Teniendo en cuenta estas ideas fundamentales, se puede proceder a establecer la relacion matematica del caso y estudiar su generalizacion. Como una primera aproximacion, dice el autor citado, a la ley que exprese el crecimiento normal de la poblacion se ha tomado la expresion

$$y = \frac{be^x}{1 + ce^x}$$

Es decir, la curva logistica cuya ecuacion dimos atras, en el numero (19), y cuya forma sigmoidal se representa en la figura 5.

Esta expresion satisface perfectamente los postulados numeros 1, 2, 3, y con gran aproximacion el numero 5. Respecto del numero 4, se requiere otra modalidad de expresion, dentro de la misma estructura matematica de la curva logistica, que mas adelante trataremos de generalizar.

Como lo habiamos dicho antes, este es tambien el resultado a que llegaron los matematicos europeos por sistemas puramente deductivos. Se trata de conseguirte de un caso singular de correspondencia entre los metodos y procedimientos deductivos y los inductivos, lo que se refleja ampliamente en la siguiente transcripcion. Dice el profesor Pearl

«Despues de publicado nuestro primer estudio sobre estos temas, tuvimos conocimiento de que hace aproximadamente tres cuartos de siglo, un matematico belga, Verhulst, se habia anticipado a nos

otros (1) en el uso de la ecuacion indicada para representar el crecimiento de la poblacion. Esos estudios corrieron publicados en dos largos escritos olvidados, ya que nunca fueron citados por los comentaristas de la literatura cientifica relativa a poblacion. (2) El unico autor actual que parece haber conocido los trabajos de Verhulst es Du Pasquier (3), quien a nuestro modo de ver se permite algunas licencias al introducir ciertas modificaciones injustificadas y en la practica incorrectas.

A la curva que estamos discutiendo se le hacen sin embargo serias objeciones, representa condiciones muy rigidas, sin elasticidad, como la del punto de inflexion exactamente en la mitad del desarrollo completo de la poblacion, y en forma tal, como si las fuerzas que en la ultima mitad de la historia obraron para rebajar la rata de crecimiento, fueran exactamente las mismas, y distribuidas simetricamente con respecto al tiempo, que obraron al principio para desarrollar la poblacion hasta alcanzar su maximun de rata de crecimiento. No conduce en consecuencia, a un hecho evidentemente real este resultado, y es necesario por lo tanto modificarlo.

Veamos ahora como se desarrolla el calculo para la obtencion de la curva buscada. Se tratara de generalizar el procedimiento en la siguiente exposicion, apartandonos un poco de los sistemas que hemos visto usados al respecto, a fin de darles mas claridad para la interpretacion general del problema.

Si llamamos y la poblacion considerada como una funcion continua, que no encuentra *ningun obstaculo* en su libre desarrollo (Verhulst), y x el tiempo, su rata de crecimiento estara dada por la expresion

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \epsilon y \quad (21)$$

Se considera pues, proporcional a la poblacion misma mediante la constante,

(1) Pearl R. and Reed L. J. Population growth of the U. S. States since 1790 and its mathematical representation.

(2) Verhulst P. F. Recherches mathematiques sur la loi d'accroissement de la population. *Mem. del Acad. Roy. de Bruxelles* T. XVIII pp 1-58 1844. *Idem* T. XX pp 1-52 1846.

(3) Du Pasquier L. G. Esquisse d'une Nouvelle Theorie de la Population, *Vierteljahrsschr. der Naturforsch. Ges. Zurich*, Jahrg. 63 pp 236-249, 1918.

que es en este caso el *coeficiente biológico de procreacion*

Integrando la expresion (21) y tomando como constante de integracion el valor $\text{Log } m$ (*), obtenemos

$$y = me^{\varepsilon} \quad (22)$$

Como m y ε son valores esencialmente positivos, esta ecuacion exponencial tiene una forma similar a la representada en la figura 6

Dado el raciocinio empleado para la obtencion de esta expresion (22), es evidente que las llamadas formulas exponenciales no son las mas adecuadas para representar el desarrollo de la poblacion, y de aqui el poco exito en asimilar este crecimiento al de la capitalizacion de los valores en calculos de finanzas, aunque entre dos valores censales poco distanciados, un segmento de esta curva da valores muy aproximados para la interpolacion comun de poblaciones intermedias

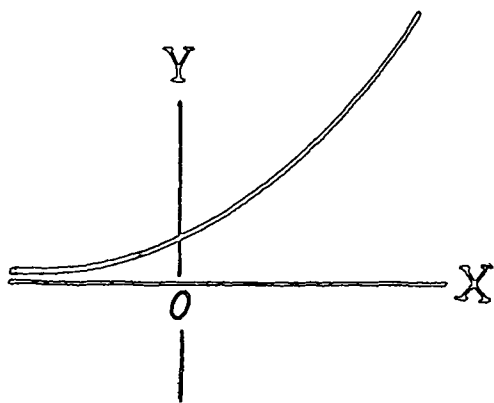


Fig. 6

Volviendo de nuevo sobre el valor establecido para la rata de crecimiento (21), y dado el caso, que hay ciertos obstaculos que se oponen al libre desarrollo de la poblacion los cuales a su vez son proporcionales a esta misma poblacion, el valor ε antes establecido debe cambiarse por una funcion decreciente de la forma $\varepsilon - cy$, (una funcion lineal en este caso), y entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (\varepsilon - cy)y$$

En que c es un coeficiente positivo de simple proporcionalidad

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{c}{\varepsilon - cy} \right) \partial y = \varepsilon \partial x$$

$$\frac{y}{c'(\varepsilon - cy)} = e^{\varepsilon x}$$

Llamando $\text{Log } c'$ la constante de integracion

De donde

$$y = \frac{\varepsilon c'}{cc' + e^{-\varepsilon}}$$

Y si hacemos

$$\frac{\varepsilon}{c} = k$$

$$\frac{1}{cc'} = m$$

$$y = \frac{k}{1 + me^{-\varepsilon}} \quad (23)$$

Ecuacion de una curva logistica, en todo igual a la de ecuacion (20), representada en la figura 5

En efecto

$$\text{Para } x = +\infty, y = k$$

$$x = -\infty, y = 0$$

Luego el eje de x y la horizontal MN , son asintotas de la curva

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{k \varepsilon m e^{-\varepsilon}}{(1 + m e^{-\varepsilon})^2} = \frac{\varepsilon}{k} (k - y) y \quad (24)$$

$$\text{Para } \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$y = 0$$

$$y = k$$

O sea que los puntos de maxima y minima quedan sobre las asintotas ya conocidas

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\varepsilon}{k} \right)^2 (k - 2y)(k - y)y \quad (25)$$

$$\text{Para } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

(*) Todos los logaritmos aqui citados son neperianos

los puntos de inflexion son raices de las ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ k - y &= 0 \\ k - 2y &= 0 \end{aligned}$$

O sea, que prescindiendo de los dos primeros puntos, localizados sobre las asintotas de la curva, el punto de inflexion a distancia finita, corresponde a los valores

$$y = \frac{1}{2}k$$

$$x = \frac{1}{\varepsilon} \text{Log } m \quad (\text{Logaritmos neperianos})$$

Quedan así perfectamente determinadas la forma y las principales características de la curva logistica dada por la expresion (20)

Esta curva admite todavia otra forma mas general, con la ventaja, ademas, de satisfacer las condiciones del postulado 4 antes indicado, sobre el caracter ciclico de las epocas culturales

Nos apartamos un poco de los estudios consultados, al tratar este problema de la siguiente manera

En la expresion (24) cambiando $\frac{\varepsilon}{k}$ por k_1 para simplificar, tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k_1 (k - y) y$$

De modo que en un punto P cualquiera de ordenada y el complemento para la maxima poblacion sera $(k - y)$, y la rata del crecimiento sera igual al producto de la poblacion por su complemento, mediante el coeficiente de proporcionalidad k_1 , en cualquier tiempo, pero si cambiamos este coeficiente por una funcion del tiempo, en vez de la curva que presenta un ciclo sencillo, vamos a obtener otra, en que la rata del crecimiento no solo depende de los factores y y $k - y$, sino ademas del tiempo mismo en que se tomen

Y así, si hacemos

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x) \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= y(k - y) f(x) \\ \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{k - y} \right) dy &= k f(x) dx \end{aligned}$$

$$\frac{my}{k - y} = e^{k_1 f(x) \delta}$$

Tomando una constante de integracion igual a $\text{Log } m$

$$y = \frac{k}{1 + me^{-k f(x) \delta}}$$

Y si finalmente hacemos

$$F(x) = -k f(x) \delta x, \text{ tenemos}$$

$$y = \frac{k}{1 + me^{F(x)}}$$

Para $F(x)$ se admite la forma general

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

Y entonces

$$y = \frac{k}{1 + me^{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n}} \quad (26)$$

$$\text{Para } a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$$

esta ecuacion se reduce a la misma del numero (23)

Si el valor de m fuera negativo, la curva seria discontinua ya que a mas de ser asintotica en la zona negativa de las abscisas, por encima del eje de x , tendria ademas otro ramal de valores negativos. Como no es posible admitir esta forma en el caso del crecimiento de un organismo, dicho valor debe ser positivo. Y por la misma razon, el valor de k tambien lo sera

Con estas condiciones ya no seran posibles los valores negativos para y

$$\text{Para } F(x) = +\infty \quad y = 0$$

$$\text{Para } F(x) = -\infty \quad y = k$$

$$\text{Para } F(x) = 0 \quad y = \frac{k}{1 + m}$$

Se precisa de consiguiente, ademas, que la curva este localizada entre dos lineas horizontales que seran sus asintotas, el eje de x y una paralela a la distancia vertical y positiva k

Para continuar determinando la forma de esta curva, tendremos

Puntos de maxima y minima

Se deducen de la relacion

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y(k - y) f(x) = 0$$

Pero $F(x) = -k \int f(x) \delta x$

Luego $F'(x) = -kf(x) \delta x$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{y}{k} (k - y) \quad F'(x) = 0$$

De modo que los valores de maxima y minima resultaran como raices de la ecuacion

$$F'(x) = 0$$

Y las ecuaciones de las asintotas seran

$$y = 0$$

$$k - y = 0$$

Puntos de inflexion

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F''(x) - F'(x)(2y - k) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$F''(x) + \frac{1}{k} [F'(x)]^2 (2y - k) = 0$$

De donde

$$y = \frac{k}{2} - \frac{k}{2} \frac{F''(x)}{[F'(x)]^2} \quad (27)$$

De modo que los puntos de inflexion resultaran de la interseccion de la curva (26) con esta ultima numero (27)

Para condiciones especiales en el valor de n , ecuacion (26), y en los de las constantes arbitrarias, las nuevas formas aplicadas al crecimiento de la poblacion son principalmente las de las figuras 7 y 8. En ambos casos se marcan bien distintamente los ciclos de crecimiento, la primera curva (7) representa una poblacion que se anula, y la segunda (8) una que crece

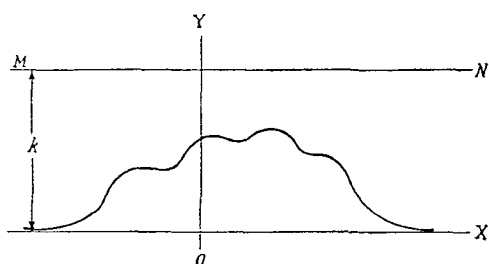


Fig 7

La forma general de la ecuacion (27) se limita a menudo a 5 constantes como en la ecuacion (28) que se considera suficiente

mente detallada para acomodarse a las mas variadas modalidades de los problemas de poblacion

$$y = \frac{k}{1 + me^{1+2+3+8}} \quad (28)$$

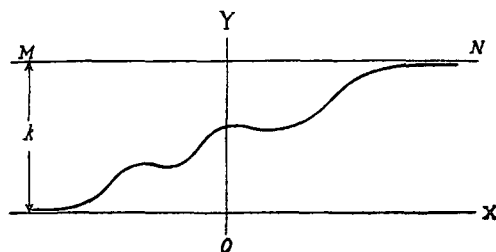


Fig 8

En esta forma limitada se obtiene ya una curva sin puntos de maxima ni minima, con su punto de inflexion localizado en tal posicion que no pertenece al desarrollo de la mitad de la poblacion y sin que las ramas de la curva que estan hacia arriba y hacia abajo de dicho punto, sean simetricas con respecto al tiempo

Como ejemplo tipico de una curva representativa de este desarrollo asimetrico, puede citarse la de la ecuacion siguiente

$$y = \frac{2}{1 + 0.1369e^{-(+0.5x)}} \quad (29)$$

Por medio de la ecuacion (27) se obtiene que el punto de inflexion este en su interseccion con la curva,

$$y = 1 + \frac{12x}{(2 + 3x^2)^2} \quad (30)$$

El tiempo esta tomado en decimos, la poblacion en millones de habitantes, $k=2$

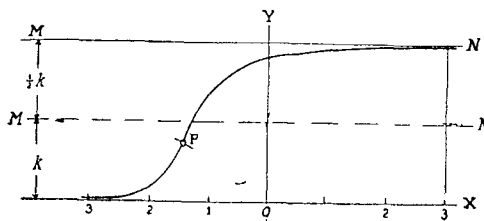


Fig 9

CURVA DE DESARROLLO ASIMETRICO

En la figura 9 se representa la curva (29) con trazo lleno, y la curva (30) con linea de puntos, comoquiera que la primera curva tiene por asintotas las lineas OX y MN cuando se extiende de $+\infty$ a $-\infty$ y la segunda curva en esas mismas con

diciones tiene por asintota la linea M' N', intermedia entre las dos anteriores y a ellas paralela, en la curva de poblacion, solo hay un punto de inflexion, marcado con la letra P en la figura 9

El sistema practico de calcular estas curvas de poblacion, cuando esta se presenta en forma ciclica, es calcular una curva para cada ciclo independientemente de los otros. Se usara para cada ciclo la curva logistica comun (23), o mejor aun la curva (28) si se observa asimetria del desarrollo en los ciclos que se estudian. Teoricamente se puede ajustar la curva de forma general (26) limitandola a 5 o 7 constantes, para los casos de poblacion en que se trata de una larga historia de crecimiento, con varios ciclos de variaciones sucesivas, pero ello implica una labor grande por una parte, y por la otra, hay mas elasticidad en el procedimiento recurriendo al sistema de tratar esos ciclos separadamente.

Si para un ciclo cualquiera se ha de partir de una poblacion inicial ya conocida, que llamaremos p , las formas (23) y (28) aconsejadas se cambiarian por

$$y = p + \frac{k}{1 + me^{-\epsilon}} \quad (31)$$

$$y = p + \frac{k}{1 + me^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots}} \quad (32)$$

Las ecuaciones de las asintotas inferior y superior, serian

$$\begin{aligned} y &= p \\ y &= p + k \end{aligned}$$

Para cada dos ciclos sucesivos en una curva de crecimiento, la asintota inferior del segundo ciclo es mas baja que la superior del primer ciclo, porque el segundo arranca un poco antes de que el primero haya llegado a alcanzar su nivel de crecimiento nulo. Es el caso de un pais que entra en la era de su historia industrial cuando aun no ha alcanzado a desarrollar el limite de poblacion a que pudiera haber llegado en la era anterior, caracterizada por condiciones puramente agricolas.

El uso de la logistica comun, ecuacion (23), cuando los ciclos presentan simetria respecto del punto de inflexion, tiene la ventaja de presentar menos labor en los calculos, y dar a conocer el valor de la constante ϵ , que determina para cada va-

lor del tiempo los cambios de crecimiento en la poblacion, como facilmente puede observarse en la ecuacion (23)

Terminamos esta parte del estudio transcribiendo un ejemplo calculado por Pearl (obra citada) sobre el crecimiento ciclico de la poblacion de Alemania

Al dibujar graficamente los datos de la poblacion alemana, con relacion a dos ejes de coordenadas, se observa, a simple vista, la presencia de dos ciclos entre los años registrados, desde 1816 hasta 1910. Esta es la primera operacion indicada para el estudio de curvas de poblacion, pues si se hubiera empezado por ensayar curvas de crecimiento simetrico, por ejemplo, hubiera sido infructuoso todo el trabajo hecho, porque la poblacion desde 1816 viene desarrollandose en forma de una curva concava con respecto al eje de los tiempos, figura 10, Seccion A B

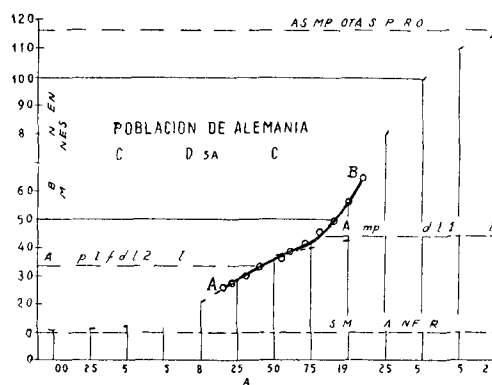


Fig 10

Despues de esta primera determinacion grafica, se pueden ensayar los metodos antes expuestos, es decir, si se calculan los ciclos para curvas independientes, o se calculan ambos para una curva de forma general como la de la ecuacion (26)

En el primer caso, usando la logistica comun (23), se obtienen para los dos ciclos estas ecuaciones

$$\text{Hasta el año de 1850} \left\{ y = 10\,109 + \frac{34\,036}{1 + 2\,490e^{-0.039t}} \right. \quad (33)$$

$$\text{De 1850 en adelante} \left\{ y = 33\,587 + \frac{82\,944}{1 + 297\,046e^{-0.0472t}} \right. \quad (34)$$

Calculada la ordenada de la asintota superior del primer ciclo por la logistica comun, se obtiene el primer punto de inflexion para el año de 1855 aproximadamente, y ademas el valor de $p=10\,109$ (millones de habitantes) para completar la

estructura de la ecuacion (33), de la misma manera se procede para la ecuacion (34)

El cuadro de valores respectivos es

CUADRO NUMERO XXX

AÑOS	POBLACION EN MILLONES DE HABITANTES		CORRECCIONES	
	Calculada	Observada	Absolutas	En %
1816	24 728	24 833	- 0 105	- 0 42
1822	27 125	27 040	+ 0 685	+ 2 53
1831	29 723	29 710	- 0 017	- 0 16
1840	32 65	32 790	- 0 225	- 0 69
1855	36 586	36 114	+ 0 472	+ 1 31
1861	38 281	38 140	+ 0 141	+ 0 37
1871	40 817	41 059	- 0 192	- 0 48
1880	44 230	45 230	- 1 000	- 2 21
1890	49 430	49 430	0 000	0 00
1900	56 10	56 367	+ 0 700	+ 0 01
1910	64 930	64 930	0 000	0 00
Medio cuadrático en miles y en %			457 574	1 130

Como puede observarse, la mayor parte de las correcciones bajan del 1% y solo dos de ellas pasan un poco del 2%. Para Colombia, como lo vimos antes, por los metodos de curvas empiricas, hemos hecho un ajuste todavia mas aproximado

Es interesante traducir la historia alemana al traves de estas curvas de poblacion, el crecimiento de ella fue casi en linea recta, con una ligera concavidad hacia la base (eje de los tiempos), hasta fines de la guerra franco-prusiana, como este fue un periodo de destacadas condiciones agricolas, se va formando asi un primer ciclo que hubiera culminado con saturacion de la poblacion en las vecindades de su asintota superior, con 44 millones de habitantes, pero inmediatamente despues de la guerra, en el año de 1870, se desarrolla un crecimiento de poblacion en forma tan intensa como no habia ocurrido en ningun tiempo anterior, es el principio de un segundo ciclo de poblacion que se caracterizo, ademas, por un rapido desarrollo industrial. Es evidente ahora el cumplimiento de las teorias sobre interpretacion del crecimiento de la poblacion, aun en los casos especialmente dificiles, como este de los dos crecimientos de forma ciclica en la poblacion de Alemania hasta el año de 1914, aproximadamente

Para las extrapolaciones tendientes a buscar valores de poblacion vecinos a los de las asintotas, la mas alta y la mas baja, debe tenerse en cuenta que, mediando como es el caso, un tiempo muy largo, con respecto a los datos de la ultima observacion censal, los resultados no merecen

credito, especialmente si se trata de la asintota superior que necesariamente ha de ser mas baja, si se tiene en cuenta la menor poblacion de Alemania desde el año de 1925 para aca, provocada por la desmembracion de sus territorios y por los calamitosos eventos de la penultima hecatombe europea, entre los años de 1914 y 1918. Esta circunstancia, unida a las actuales condiciones del Viejo Mundo, revolucionado por una guerra de condiciones belicas sin precedentes en la historia de la humanidad, va a presentar una forma peculiar en la curva de la poblacion alemana, que seria muy interesante estudiar a la luz de estas teorias

Queda con lo anterior aceptado, que las extrapolaciones no tienen valor alguno de probabilidad cuando se retiran sus valores considerablemente del ultimo valor observado

Si cambiamos el sistema de calculo, para emplear una curva unica de desarrollo ciclico general, como la estudiada en la ecuacion (26), limitandola a cinco constantes arbitrarias, la posicion de las asintotas extremas se cambia ya sensiblemente

Siguiendo a Pearl (obra citada), la ecuacion calculada para este caso, seria

$$y = \frac{119\,552}{1 + e^{1\,9416 - 0\,0331x - 0\,00038x^2 - 0\,00000021x^3}}$$

Con los valores de esta ecuacion se ha calculado el grafico de la figura 11

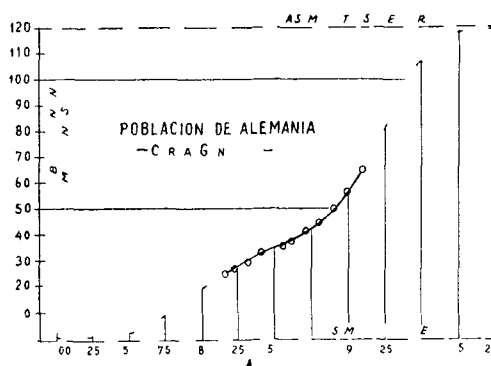


Fig 11

El calculo de asintotas da

Para la inferior $y = 0$ (no hay poblacion inicial)

Para la superior $y = 119\,552$ (distinta de 116 531)

Como en el caso anterior del empleo de dos curvas, podemos ahora calcular el siguiente cuadro

CUADRO NUMERO XXXI

ANOS	POBLACION		CORRECCIONES	
	Calculada	Observada	Absolutas	En %
1816	25 539	24 833	- 0 707	- 2 84
1822	27 549	27 040	- 0 509	- 1 88
1831	30 237	29 770	- 0 467	- 1 56
1840	32 619	32 790	+ 0 171	+ 0 52
1855	36 357	36 114	- 0 243	- 0 67
1861	37 954	38 140	+ 0 186	+ 0 41
1871	41 024	41 059	+ 0 035	+ 0 08
1880	44 500	45 230	+ 0 730	+ 1 61
1890	50 549	49 430	- 1 119	- 2 26
1900	56 238	56 367	+ 0 129	+ 0 23
1910	64 900	64 930	+ 0 030	+ 0 04
Medio cuadrático en miles y en %			513 660	0 454

Los resultados de la ultima columna, comparativamente con los correspondientes del cuadro numero XXX, indican que se trata de una curva con condiciones de una sorprendente flexibilidad geometrica, ajustable a las variaciones, casi pudieramos decir caprichosas, del desarrollo numerico de la poblacion. La asintota superior obtenida se aproxima con un 26% a la anteriormente encontrada con el uso de dos curvas. Finalmente puede observarse en las figuras 10 y 11, que para el caso de una extrapolacion de valores, anteriores al año de 1780, es mas indicado tomar los de la figura 10 que los relativos a esta ultima curva de forma general.

Dejando asi ya sentado como principio que se trata de una ley descriptiva de la poblacion, vamos a hacer una serie de aplicaciones relacionadas con la poblacion de Colombia.

CAPITULO V

ESTADO DE LA POBLACION COLOMBIANA SEGUN SU POSICION EN LA CURVA LOGISTICA O SIGMOIDAL

Empezaremos por exponer los diversos procedimientos empleados en la tecnica de las ecuaciones correspondientes a las curvas anteriores.

Estos procedimientos pueden clasificar se asi:

- 1º *Curvas de la forma general*
- 2º *Aplicacion a la logistica comun*
- 3º *Ajuste por el sistema de los minimos cuadrados*
- 4º *Otros metodos para el ajuste de la curva logistica a mas de tres puntos*
- 5º *Posibilidad del problema*

Procediendo en el orden indicado, vamos a detallar cada uno de estos numerales hasta reducirlos a formas de aplicacion inmediata.

1º *Curvas de la forma general*

$$y = \frac{k}{1 + me^{F(x)}}$$

Para una curva en que se puedan obligar cinco puntos debemos limitar asimismo a cinco las constantes.

$$\text{Entonces } F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Y si hacemos

$\text{Log } m = a_0$ (Logaritmos neperianos mientras no se indique lo contrario)

$$y = \frac{k}{1 + e^{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}}$$

Para la solucion practica de todos los casos en estas curvas de poblacion, es necesario que las abscisas esten igualmente distanciadas entre si, lo que ocurre con frecuencia en los datos censales.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = \text{Log } \frac{k-y}{y} \quad (35)$$

Y si los cinco puntos son

$(0, y_0), (x_1, y_1), (2x_1, y_2), (3x_1, y_3), (4x_1, y_4)$ estos cinco puntos reemplazados en (35) proporcionan un sistema de cinco ecuaciones en que por eliminacion de a_0, a_1, a_2 , etc. y x_1 se llega finalmente a,

$$\begin{aligned} y_1^4 y_3^4 (k - y_0) (k - y_2)^6 (k - y_4) &= \\ = y_0 y_2^6 y_4 (k - y_1)^4 (k - y_3)^4 &\quad (36) \end{aligned}$$

En esta relacion (36) hay necesidad de calcular el valor de k dentro de la aproximacion requerida, usando los metodos para ecuaciones de alto grado y luego calcular los siguientes valores intermedios

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \text{Log} \frac{y_0 (k - y_1)}{y_1 (k - y_0)} \\ \beta_2 &= \text{Log} \frac{y_0 (k - y_2)}{y_2 (k - y_0)} \\ \beta_3 &= \text{Log} \frac{y_0 (k - y_3)}{y_3 (k - y_0)}\end{aligned}$$

y con ellos finalmente

$$\begin{aligned}a_0 &= \text{Log} \frac{k - y_0}{y_0} \\ a_1 &= \frac{18\beta_1 - 9\beta_2 + 2\beta_3}{6x_1} \\ a_2 &= \frac{4\beta_2 - 5\beta_1 - \beta_3}{2x_1^2} \\ a_3 &= \frac{\beta_3 + 3\beta_1 - 3\beta_2}{6x_1^3}\end{aligned}$$

2º Aplicacion a la logistica comun

En la ecuacion general para

$$\begin{aligned}a_0 &= a_3 = a_n = 0 \\ y &= \frac{k}{1 + e^{-a_1 x}}\end{aligned}\quad (37)$$

que es una logistica comun

$$a_0 + a_1 x = \text{Log} \frac{k - y}{y} \quad (38)$$

Para valores de x igualmente espaciados, escogemos como antes los puntos $(0, y_0)$, (x_1, y_1) , $(2x_1, y_2)$

Estos valores en (38) dan

$$\begin{aligned}a_0 &= \text{Log} \frac{k - y_0}{y_0} \\ a_0 + a_1 x_1 &= \text{Log} \frac{k - y_1}{y_1} \\ a_0 + 2a_1 x_1 &= \text{Log} \frac{k - y_2}{y_2}\end{aligned}$$

Por eliminacion de a_0 y a_1 se encuentra

$$\frac{y_0 (k - y_1)}{y_1 (k - y_0)} = \left(\frac{y_0 (k - y_2)}{y_2 (k - y_0)} \right)^2$$

que se resuelve en

$$k = \frac{2y_0 y_1 y_2 - y_1^2 (y_0 + y_2)}{y_0 y_2 - y_1^2} \quad (38a)$$

Los valores de a_0 y a_1 serian

$$a_0 = \text{Log} \frac{k - y_0}{y_0} \quad (38b)$$

$$a_1 = \frac{1}{x_1} \text{Log} \frac{y_0 (k - y_1)}{y_1 (k - y_0)} \quad (38c)$$

3º Ajuste por el sistema de los minimos cuadrados

Sea la forma de la ecuacion (37) para la logistica, en la cual cambiamos facilmente el valor de las constantes a esta nueva forma

$$y = \frac{B}{C + e^x}$$

Y si ademas hacemos $a_1 = -A$

$$y = \frac{B}{C + e^{-Ax}} \quad (39)$$

Es claro que estos valores de las constantes son encontrados con el reemplazo de tres puntos solamente, para un ajuste con mayor numero de puntos aplicando el sistema de los minimos cuadrados, se hace siguiendo este otro procedimiento

Por los metodos anteriores se obtiene el valor aproximado de A en la ecuacion (39), y para dicho valor se admite una correccion h , y entonces

$$y = \frac{B}{C + e^{-(A+h)x}}$$

Se consideran ahora como constantes de la ecuacion, los valores B , C y h solamente

Haciendo el desarrollo correspondiente

$$e^{-hx} = 1 - hx + \frac{h^2 x^2}{2!} - \frac{h^3 x^3}{3!} + \dots$$

Si se considera que h es muy pequeño,

$$y = \frac{B}{C + e^{-Ax} (1 - hx)}$$

O sea

$$B - Cy + hxye^{-Ax} = ye^{-Ax} \quad (40)$$

El ajuste por cuadrados minimos puede hacerse ahora por un metodo muy general, o sea haciendo entrar las constantes en una ecuacion de la forma

$$y = a_1 A_1(x) + a_2 A_2(x) + \dots + a_n A_n(x)$$

En que $A_1(x)$, $A_2(x)$ son funciones conocidas y determinadas por la ecuacion de la curva, cuyo ajuste trata de hacer

se=(Vease Davis and Nelson, Elements of Statistics, The Method of Least Squares)

En el caso de la ecuacion (40), las constantes a_1 , a_2 y a_3 estan representadas por B , $-C$ y h , en cambio

$$A_1(x) = 1$$

$$A_2(x) = y$$

$$A_3(x) = xye^{-A}$$

Admitiendo el valor simbolico de las expresiones (41) y (42) en donde estan reemplazados los puntos $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, etc

$$\begin{bmatrix} A & A_j \end{bmatrix} = A(x_1) A_j(x_1) + A(x_2) A_j(x_2) + \dots + A(x_p) A_j(x_p) \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} A & y \end{bmatrix} = A(x_1) y_1 + A(x_2) y_2 + \dots + A(x_p) y_p \quad (42)$$

Para N constantes y n puntos de la curva habria N ecuaciones normales de la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 & A_1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} a_2 + \dots + \begin{bmatrix} A_1 & A_n \end{bmatrix} a_n &= \begin{bmatrix} A_1 & y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_2 & A_1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} A_2 & A_2 \end{bmatrix} a_2 + \dots + \begin{bmatrix} A_2 & A_n \end{bmatrix} a_n &= \begin{bmatrix} A_2 & y \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} A_n & A_1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} A_n & A_2 \end{bmatrix} a_2 + \dots + \begin{bmatrix} A_n & A_n \end{bmatrix} a_n &= \begin{bmatrix} A_n & y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los valores de estas ecuaciones normales se deducen de las expresiones (41) y (42) cambiando los indices i y j por los valores del caso

Para el estudio presente tendríamos el sistema siguiente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 & A_1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} a_2 + \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \end{bmatrix} a_3 &= \begin{bmatrix} A_1 & y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_2 & A_1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} A_2 & A_2 \end{bmatrix} a_2 + \begin{bmatrix} A_2 & A_3 \end{bmatrix} a_3 &= \begin{bmatrix} A_2 & y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_3 & A_1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} A_3 & A_2 \end{bmatrix} a_2 + \begin{bmatrix} A_3 & A_3 \end{bmatrix} a_3 &= \begin{bmatrix} A_3 & y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ademas encontramos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_1 & A_1 \end{bmatrix} &= n & \begin{bmatrix} A_2 & A_2 \end{bmatrix} &= \sum y^2 & \begin{bmatrix} A_1 & y \end{bmatrix} &= \sum ye^{-A} \\ \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} &= \sum y & \begin{bmatrix} A_2 & A_3 \end{bmatrix} &= \sum xy e^{-A} & \begin{bmatrix} A_2 & y \end{bmatrix} &= \sum y e^{-A} \\ \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \end{bmatrix} &= \sum xye^{-A} & \begin{bmatrix} A_3 & A_3 \end{bmatrix} &= \sum x^2 y^2 e^{-2A} & \begin{bmatrix} A_3 & y \end{bmatrix} &= \sum x y^2 e^{-2A} \end{aligned}$$

De aqui las ecuaciones normales

$$\left. \begin{aligned} Bn - C\sum y + h\sum xye^{-A} &= \sum ye^{-A} \\ B\sum y - C\sum y^2 + h\sum xy^2 e^{-A} &= \sum y^2 e^{-A} \\ B\sum xye^{-A} - C\sum xy^2 e^{-A} + h\sum x^2 y^2 e^{-2A} &= \sum xy^2 e^{-2A} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Estas mismas ecuaciones se obtienen de la expresion

$$\sum r^2 = \sum (B - Cy + hxye^{-A} - ye^{-A})$$

haciendo

$$\sum f'(B) = 0$$

$$\sum f'(C) = 0$$

$$\sum f'(h) = 0$$

como es por lo demas evidente

4º Otros metodos para el ajuste de la curva logistica a mas de tres puntos

No deja de tener interes el metodo seguido por G U Yule en 1925, en el que por un cambio convencional de las constantes dentro de la estructura de la curva logistica parte de la siguiente forma

$$y = \frac{k}{1 + e^{(\beta - \alpha)x}}$$

Como se ve al comparar esta ecuacion con la (23), vemos que se han efectuado estos cambios

$$\varepsilon = 1/\alpha \quad (44)$$

$$e^\beta = m$$

Tambien se observa que β tiene un valor signaletico, ya que cuando $\beta = \lambda$, $v = 1/k$, posicion vertical del punto de inflexion y situacion definida del eje de las ordenadas, a una distancia β del punto de inflexion

El metodo de solucion toma como unidad de tiempo intervalos censales igualmente espaciados. Luego se sigue el procedimiento expuesto por E. Krummeich en el *Journal de la Societe de Statistique de Paris*, 1927, y que se resume asi

Se buscan las inversas de las ordenadas correspondientes a tres datos censales, igualmente espaciados

Sean $y_0 \leq y_1 \leq y_2$, el caso mas comun es sin embargo $y_0 < y_1 < y_2$, y si hacemos el intervalo de tiempo igual a la unidad

$$\frac{1}{y_0} = \frac{1}{k} \left(1 + e^{\beta/\alpha} \right)$$

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{k} \left(1 + e^{(\beta-1)/\alpha} \right)$$

$$\frac{1}{y_2} = \frac{1}{k} \left(1 + e^{(\beta-2)/\alpha} \right)$$

Luego, las diferencias de esta inversas, asi

$$d_1 = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_1} = \frac{1}{k} e^{\beta/\alpha} \left(1 - e^{-1/\alpha} \right)$$

$$d_2 = \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} = \frac{1}{k} e^{(\beta-1)/\alpha} \left(1 - e^{-1/\alpha} \right)$$

Despues se encuentra facilmente

$$\alpha = \frac{\text{Log } e}{\text{Log } \frac{d_1}{d_2}} \quad (*)$$

$$\beta = \frac{\text{Log } k + \text{Log } \frac{d_1^2}{d_1 - d_2}}{\text{Log } \frac{d_1}{d_2}} \quad (*)$$

$$k = \frac{y_0 (d_1 - d_2)}{d_1 - d_2 - y_0 d_1^2} \quad (45)$$

() Logaritmos comunes

Tambien hay el metodo aconsejado por Yule en 1925 y desarrollado a base de las sumas de las *inversas de la poblacion* y no de las *diferencias*, como en el caso anterior. Tiene la ventaja de poder operarse con un gran numero de puntos censales

Para mayores detalles, consultar la *Revista de Ciencias Economicas de Buenos Aires*, año XXV, serie II, numero 193

Expuesto asi el tratamiento tecnico de estas ecuaciones, vamos a buscar a continuacion sus condiciones de posibilidad

5° Posibilidad del problema

Solo tres condiciones limitan este problema, cuando se trata de la curva logistica comun de tres parametros. Expuestas en orden a su presentacion como datos iniciales del problema, son

1ª condicion

Ya la habiamos visto, si y_0, y_1 e y_2 , son tres valores de la poblacion tomados en orden sucesivo, respecto al tiempo, es necesario que

$$y_0 \leq y_1 \leq y_2$$

O simplemente, y como caso mas comun en la practica

$$y_0 < y_1 < y_2$$

Estos valores ademas, deben tener, como ya se dijo, equidistancia horizontal, es decir, en cuanto al tiempo

2ª condicion

Como de acuerdo con la relacion (44), el valor de α es esencialmente positivo,

$$\frac{d_1}{d_2} > 1$$

Reemplazando valores

$$\frac{y_2 (y_1 - y_0)}{y_0 (y_2 - y_1)} > 1$$

O sea

$$y_1 > \frac{2y_0 y_2}{y_2 + y_0}$$

La *segunda condicion*, en consecuencia, establece que el termino medio entre tres valores de poblacion, tomados en orden creciente, sea mayor que el *medio armonico* de los terminos extremos

3ª condicion

Se requiere ademas que el valor de k sea positivo

De la relacion (45) sacamos entonces

$$d_1 - d_2 > y_0 d_1^2$$

$$1 - \frac{d_2}{d_1} > y_0 d_1$$

Reemplazando valores

$$1 - \frac{y_0 (y_2 - y_1)}{y_2 (y_1 - y_0)} > \frac{y_1 - y_0}{y_1}$$

De donde se deduce

$$y_1 > \sqrt{y_0 y_2} \quad (46)$$

Es decir, la *tercera condicion* establece que el termino medio entre los tres valores de la poblacion tomados en la *segunda condicion* debe ser mayor que el *medio geometrico* de los terminos extremos

Esta tercera condicion implica necesariamente el cumplimiento de la segunda, es decir, la comprende, porque el medio geometrico es mayor que el armonico. De modo que si en los terminos de los valores censales, la primera condicion esta satisfecha, como caso mas comun, y esta tercera condicion comprende la segunda, solo es necesario el cumplimiento de la relacion (46)

Para la seleccion de puntos censales, capaces de satisfacer estas condiciones, proponemos el siguiente procedimiento

Sea la ecuacion (18) admitida en el estudio de las formulas empiricas como la de resultados mas aproximados en los calculos de poblacion ya estudiados

$$y = 2160.2 + 31.767x + 0.9387x^2 - 197.625 \log x \quad (\text{Logs com})$$

Para los tres valores y_0, y_1, y_2 tendriamos como condicion minima $y_1 = \sqrt{y_0 y_2}$

Si llamamos x_0, x_1, y las abscisas correspondientes $x_1 = \frac{x_2 + x_0}{2}$

Admitiendo un valor fijo para el ultimo punto, a fin de buscar los dos primeros

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 70510 \\ y_2 = 8702 \end{array} \right\} \text{Poblacion de 1938}$$

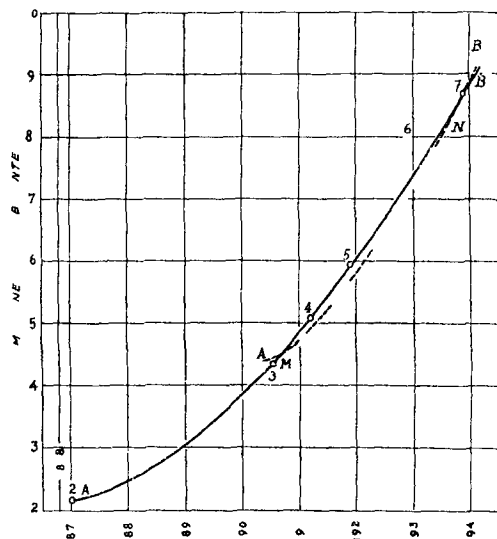


Fig 12

Así

$$y_1^2 = 8702 (2160.2 + 31.767x_0 + 0.9387x_0^2 - 197.625 \log x_0)$$

$$x_0 = 2x_1 - 70510 \quad (47)$$

Eliminando a x_0 entre estas dos ultimas relaciones, se obtiene otra entre x_1 e y_1 , o sea

$$f(x_1, y_1) = 0 \quad (48)$$

Ahora construimos la curva A B de figura 12 con ayuda de la ecuacion (18) y sus varios valores antes calculados los puntos 2, 3, etc, de dicha figura marcan las mismas posiciones antes representadas por los puntos censales en Lamina II

La interseccion de las ecuaciones (18) y (48) nos muestra inmediatamente cuales valores cumplen o no la condicion (46) ya establecida

Para la construccion de la curva (48) y a fin de evitar complicaciones de forma, usamos las ecuaciones (18) y (47), así

Sean para x_0 los valores 2, 4, 6, etc, hasta $x_0 = 20$

De aqui el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XXXII

Ecuacion (18)		Ec (47)	$y_1 = \sqrt{8702x}$
x_0	x_1	x_1	
2	2168.0	36.255	4343.5
4	2183.3	37.255	4308.8
6	2230.8	38.255	4406.0
8	2290.9	39.255	4469.8
10	2374.1	40.255	4545.2
12	2463.3	41.255	4629.8
14	2562.4	42.255	4722.1
16	2670.8	43.255	4820.9
18	2788.1	44.255	4925.6
20	2913.9	45.255	5035.5

Con los valores anteriores de las dos ultimas columnas, se construye ahora la curva A' B' de figura 12, que es un arco parabolico, graficamente queda entonces bien determinado que solo los puntos censales 4 y 5, en nuestro caso (Censos de 1912 y 1918), pueden tomarse como puntos medios, entre los tres de equidistancia horizontal necesarios para el calculo del paso de una logistica, y lo mismo ocurre con todos los puntos de la curva A B que, entre los puntos de interseccion M y N, estan por encima de la curva A' B'.

Queda así limitada la eleccion de puntos medios para el acomodo de una logistica, esta circunstancia parece quitarle flexibilidad al problema general y hasta pudiera preverse que el resultado que vamos a obtener con el calculo de logísticas dara muy probablemente menor aproximacion que el obtenido ya, y de gran precision, con el empleo de la parabola logaritmica.

A continuacion vamos a intentar las diversas posibilidades del calculo de la poblacion colombiana por medio de la curva logistica, que se estudiara bajo el punto critico de su aceptacion segun los diversos modos como puede presentarse este problema.

ESTUDIOS DE APLICACION

El procedimiento que vamos a emplear consiste en acomodar una logistica a tres puntos equidistanciados horizontalmente. El punto medio solo puede escogerse entre los valores M y N de figura 12. Como del punto M al punto 7, valor censal de 1938, solo hay una diferencia de abscisas un poco superior a 31 50 y en cambio del punto 2 (Censo de 1870) al punto M esa misma diferencia de abscisas es cerca de 37 00, es claro que no es posible acomodar una logistica que abarque los puntos extremos 2 y 7, si ella ha de calcularse con ayuda de otros puntos correspondientes a la ecuacion (18).

Si se quiere hacer entrar en el calculo uno de los puntos mas cercanos al punto 2, es preciso elegir para punto medio, uno que este un poco mas adelante del punto M y muy cercano de el, como el de abscisa igual a 39 00 por ejemplo y calcular para el primer valor de los tres puntos censales de la logistica, las respectivas coordenadas del primer punto.

La abscisa se calculara por la condicion de que los tres puntos sean equidistantes, y para las ordenadas se tomara, en cuan-

to se pueda, para llenar la condicion anterior, valores censales conocidos, o se calcularan como ordenadas de la ecuacion (18) ya admitida como base para calculos de una gran aproximacion (Parabola logaritmica).

Para observar las tendencias de la logistica segun los puntos medios escogidos dentro de la zona M N, y teniendo como fijo el punto 7, figura 12, veamos a continuacion una serie de calculos, como sigue.

Caso 1° Sea la logistica de los tres puntos (0, y_0), (x_1 , y_1), ($2x_1$, y_2)

Sea $x = 39\ 00$, abscisa del punto medio

Equidistancia $= 70\ 51 - 39\ 00 = 31\ 51$

Abscisas para la curva (18) con origen en D₂ Lamina II, como sigue

Para el primer punto 39 00

-31 51

abscisa 7 49

Punto 2A

Para el segundo punto 39 00

Punto 3A

Para el tercer punto 70 51

Punto 7

Abscisas para la logistica con origen de coordenadas, sobre la ordenada del punto 2A, así

Punto (2A) $x_0 = 0\ 000$

Punto (3A) $x_1 = 31\ 51$

Punto 7 $2x_1 = 63\ 02$

Los dos primeros valores de x , 7 49 y 39 00 en la ecuacion (18), dan

$y_0 = 2278\ 0$

$y_1 = 4512\ 4$

Los tres puntos para el calculo de la logistica seran entonces

$x_0 = 0\ 00$ $y_0 = 2278\ 0$ 2A

$x_1 = 31\ 51$ $y_1 = 4512\ 4$ 3A

$2x_1 = 63\ 02$ $y_2 = 8702\ 0$ 7

$\sqrt{y_0 y_2} = 4452$

luego se cumple, como debia ocurrir, la condicion

$y_1 > \sqrt{y_0 y_2}$

Ademas

$y_0 y_2 = 19,823156$

$2y_1 = 9024\ 80$

$y_1^2 = 20,361753\ 76$

y $y_2 = 10980$

Estos valores en las formulas conocidas numeros (38a), (38b) y (38c) dan

$$k = \frac{2y_0 y_1 y_2 - y_1^2 (y_0 + y_2)}{y_0 y_2 + y_1^2} = 82941.374$$

$$a_0 = \text{Log} \frac{k - y_0}{y_0} = 3.5669865$$

$$a_1 = \frac{1}{x_1} \text{Log} \frac{y_0 (k - y_1)}{y_1 (k - y_0)} = 0.0225840$$

y de aqui la curva de poblacion

$$y = \frac{82941.374}{1 + e^{3.5669865 - 0.0225840 x}} \quad (49)$$

Calculando para diversas abscisas, obtenemos el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XXXIII

PUNTOS	Abscisas para la curva (18)	Equidistancias	Abscisas para la Logistica	POBLACION		CORRECCIONES	
				Calculada	Observada (1)	Absolutas	En %
2	2000		- 5.490	2018.8	2168	+ 149.2	+ 6.88
2A	7.490		0.000	2278	2278	0.0	0.00
3	37.450	31.510	29.965	4.658	4355	- 108	- 0.25
3A	39.000		31.510	4512.4	4512.4	0.0	0.00
4	44.178		36.688	5038.2	5073	+ 318	+ 0.69
5	50.786	31.510	43.296	5792.4	5856	+ 63.6	+ 1.09
6	60.880		53.390	7147.7	7851	+ 703.3	+ 9.81
7	70.510		63.020	8702.0	8702	0.0	0.00
Medios cuadraticos sin incluir los puntos 2 y 6						29.923	0.536

(1) Se incluyen ademas dos valores calculados sobre la curva (18)

Los puntos 2, 3, 4, 5, 6 y 7 corresponden a los así marcados en Lamina II o en figura 12

Los puntos 2A y 3A fueron calculados en la curva (18) para las abscisas 7.49 y 39.00, corresponden en la ecuacion (49) a las abscisas

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 31.51 \end{aligned}$$

La ultima columna del cuadro es satisfactoria como acomodo aceptable de la curva, si se exceptua el punto 2, que queda muy por encima de ella y el punto 6 ya discutido por su manifiesta inconformidad

Para hacer un comentario critico sobre el valor de esta nueva forma de calculo, es necesario compararlo con otros en los cuales, conservando el punto extremo 7, figura 12, se hace variar la equidistancia entre las abscisas de los tres puntos escogidos para el paso de la curva, tal como vamos a verlo en los casos siguientes

Caso 2º Sea $x = 42.00$ abscisa del punto medio, como en el caso anterior (Punto 3B)

Abscisa del punto 7	70.51
Abscisa del punto 3B	42.00
Equidistancia	28.51

$$\begin{aligned} \text{Abscisa del primer punto 2B} \\ = 42.00 - 28.51 = 13.49 \end{aligned}$$

Las abscisas de 2B y 3B en la ecuacion (18), dan

$$\begin{aligned} y_0 &= 2536.2 \\ y_1 &= 4829.5 \end{aligned}$$

Los tres puntos para el calculo de la logistica serian entonces

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & y_0 &= 2536.2 & 2B \\ x_1 &= 28.51 & y_1 &= 4829.5 & 3B \\ 2x_1 &= 57.02 & y_2 &= 8702.0 & 7 \end{aligned}$$

Siguiendo ahora el mismo orden de calculo expuesto en el caso anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} k &= 39030.35 \\ a_0 &= 2.6664848 \\ a_1 &= -0.0248676 \end{aligned}$$

y por lo tanto la ecuacion

$$y = \frac{39030.35}{1 + e^{2.6664848 - 0.0248676 x}} \quad (50)$$

Calculando para diversas abscisas se obtiene el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XXIV

PUNTOS	Abscisas para la curva (18)	Equidistancias	Abscisas para la Logística	POBLACION		CORRECCIONES	
				Calculada	Observada (1)	Absolutas	En %
2	2000		11 490	1937 2	2168	+ 230 8	+ 10 65
2B	13 490		0 000	2536 2	2536 2	0 0	0 00
3	37 450	28 510	23 965	4371 1	4355	- 16 1	- 0 37
3B	42 000		28 510	4829 5	4829 5	0 0	0 00
4	44 178		30 588	5063 4	5073	+ 9 6	+ 0 19
5	50 786		37 296	5832 6	5856	+ 23 4	+ 0 40
6	60 880	28 510	47 390	7197 4	7851	+ 653 6	+ 9 08
7	70 510		57 020	8702	8702	0 0	0 00
Medio cuadrático sin incluir los puntos 2 y 6						12 240	0 235

(1) Se incluyen además dos valores calculados sobre la curva (18)

La última columna de este cuadro muestra la mejor adaptabilidad de la curva que en el caso anterior

Caso 3º Sea $x = 44 178$ Hemos tomado, de consiguiente, para punto medio el marcado con el número 4 en la figura 12 y correspondiente al Censo de 1912

Abscisa del punto 7	70 510
Abscisa del punto 4	44 178
Equidistancia	26 332

Abscisa del primer punto 2C,

$$44 178 - 26 332 = 17 846$$

Esta última abscisa en la ecuación (18) da

$$v_0 = 2778 7$$

Los tres puntos para el cálculo de la logística serían entonces

$x_0 = 0$	$y_0 = 2778 7$	2C
$x_1 = 26 332$	$y_1 = 5073 0$	4
$2x_1 = 52 664$	$y_2 = 8702 0$	7

Siguiendo el orden de cálculos indicado

$k =$	32234 194
$a_0 =$	2 3608973
$a_1 =$	- 0 0259396

y la ecuación

$$y = \frac{32234 194}{1 + e^{2 3608973 - 0 0259396 x}} \quad (51)$$

(calculando para diversas abscisas se obtiene el cuadro siguiente)

CUADRO NUMERO XXV

PUNTOS	Abscisas para la curva (18)	Equidistancias	Abscisas para la Logística	POBLACION		CORRECCIONES	
				Calculada	Observada (1)	Absolutas	En %
2	2000		17 846	1897 3	2158	+ 270 7	+ 12 48
2C	17 846		0 000	2778 7	2778 7	0 0	0 00
3	37 450	26 332	13 609	4371 2	4355	- 16 2	- 0 37
4	44 178		26 332	5072	5073	0 0	0 00
5	50 786		32 940	5849 4	5856	+ 6 6	+ 0 11
6	60 880	26 332	43 031	7203 7	7851	+ 647 3	+ 8 1
7	70 510		52 664	8702	8702	0 0	0 00
Medio cuadrático sin incluir los puntos 2 y 6						7 823	0 172

(1) Se incluye además un valor calculado sobre la curva (18)

La ultima columna del cuadro muestra todavia mayor adaptabilidad de la curva que en los dos casos anteriores Parece, de consiguiente, que a medida que los tres puntos obligados de la logistica, o mejor dicho los dos primeros de entre estos tres se alejan del punto 2, mejores resultados de aproximacion se encuentran Ello es evidente, pero no deberiamos prescindir de obligar puntos cercanos al punto 2, para interpretar con la curva de calculo, hata donde sea posible, la tendencia general del fenomeno censal Para documentar un poco mas las conclusiones relativas a la logistica comun, vamos a ensayar un cuarto caso mas

Caso 4º Sea $x = 47.00$ Abscisa del punto medio que llamaremos (4D)

Abscisa del punto 7	70.51
Abscisa del punto 4D	47.00
Equidistancia	23.51

Abscisa del primer punto (2D)

$$47.00 - 23.51 = 23.49$$

Las abscisas calculadas para 2D y 4D en la ecuacion (18) dan

$$y_0 = 3153.4$$

$$y_1 = 5396.4$$

Los tres puntos para el calculo de la logistica serian

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 3153.4 \quad 2D$$

$$x_1 = 23.51 \quad y_1 = 5396.4 \quad 4D$$

$$2x_1 = 47.02 \quad y = 8702.0 \quad 7$$

Calculando como antes

$$y = \frac{29209.218}{1 + e^{2.1117599 - 0.0766809}} \quad (52)$$

y el calculo correspondiente de diversos valores, asi

CUADRO NUMERO XXVI

PUNTOS	Abscisa para la curva (18)	Equidistancias	Abscisa para la logistica	POBLACION		CORRECCIONES	
				Calculada	Observada (1)	Absolutas	$\Gamma_n \%$
2	2.00		- 21.490	1865.2	2158	+ 302.8	+ 13.97
2D	23.49		0.000	3153.4	3153.4	0.0	0.00
3	37.455		13.965	4365.0	4355	- 10.0	- 0.23
4	44.178	23.51	20.688	507.0	5073	0.0	0.00
4D	47.00		2.510	5396.4	5396.4	0.0	0.00
5	50.786		27.296	5855.0	5856	+ 1.0	+ 0.02
6	60.880	23.51	37.390	7217.5	7851	+ 633.5	+ 8.78
7	70.510		47.020	8702.0	8702	0.0	0.00
Medio cuadrático sin incluir los puntos 2 y 6						4.102	0.04

(1) Se incluyen además dos valores calculados sobre la curva (18)

Continua, como se ve, la tendencia a mejorarse la aproximacion de la curva a los puntos censales y obligados

Estos cuatro casos estan estudiados to mando como puntos medios para el acomodo de las logísticas, los de abscisas 39.42, 44.178 y 47, que son los primeros que se encuentran dentro de la zona de las posibilidades M N en la curva de la figura 12 Esta zona esta determinada a base del punto extremo numero 7, como punto tercero o final Estos cuatro puntos tomados en un periodo de ocho años, marcados por las abscisas 47 y 39, avanzan

apenas un poco mas de la tercera parte, en la zona de posibilidad del problema, y los calculos de ellos derivados nos conducen a las siguientes conclusiones

1º A medida que las abscisas de estos valores medios se retiran a la derecha del punto M, figura 12, se mejora la aproximacion del ajuste que presenta la curva calculada con los puntos de observacion o de calculos hechos sobre la curva (18) (parabola logaritmica) Esta conclusion esta claramente determinada en el cuadro siguiente numero XXXVII

CUADRO NUMERO XXVII

C A L C U L O S C O N L A C U R V A L O G I S T I C A								
PUNTOS DE LOS CUATRO CASOS ESTUDIADOS				Abscisas con origen en D I am II	CORRECCIONES EN % DE LA POBLACION CALCULADA EN LOS CUATRO CASOS ESTUDIADOS			
C A S O S					C A S O S			
1	2	3	4		1	2	3	4
2	2	2	2	2000	+ 688	+ 1065	+ 1248	+ 1397
2A				7490	000			
	2B			13490		000		
		2C		17846			000	
			2D	23490				000
3	3	3	3	37400	- 075	- 037	- 037	- 023
3A				39000	000			
	3B			42000		000		
4	4	4	4	44178	+ 069	+ 019	000	000
			4D	47000				000
5	5	5	5	50786	+ 109	+ 040	+ 011	+ 002
6	6	6	6	60880	+ 984	+ 908	+ 891	+ 878
7	7	7	7	70310	000	000	000	000
Medio cuadrático de las correcciones absolutas					29923	12240	7823	4102
Medio cuadrático de las correcciones relativas					0536	0235	0172	0094

2ª El caso 4º presenta ajustes de mayor aproximación que los obtenidos en las parábolas de segundo y de tercer grados, pero con la exclusión del punto 2 que no es posible aproximar en los cálculos, de acuerdo con las condiciones de posibilidad del problema

3ª Tanto el medio cuadrático absoluto del caso 4º, como el relativo son números mayores que los respectivamente hallados para la parábola logarítmica antes estudiada por estas razones la curva logarítmica es la de mayor aproximación como descriptiva de la ley censal colombiana

4ª En el cuadro número XXXVII se observan dos porcentajes altos de corrección correspondientes a los puntos 2 y 6. En cuanto al punto 6, ello se debe al dato censal de 1928, tantas veces ya considerado como erróneo y en cuanto al punto 2, la explicación es muy clara debido a que la mitad de la diferencia de abscisas entre el punto 7 y este último, cae en figura 12 antes de la abscisa del punto M, y por lo tanto fuera de las posibilidades del problema. Ya habíamos hablado antes de esta circunstancia que

le resta a la logística flexibilidad para acomodarse a toda clase de puntos censales

5ª Los valores de las constantes, en las cuatro ecuaciones de forma logística números (49), (50), (51) y (52), permiten la formación del cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XXVIII

Abscisas del punto medio con origen en D I am II	V A L O R E S D E		
	k	a	a ₁
39000	82941374	35669865	- 0022580
42000	39030350	26664848	- 00248676
44178	32234194	23608973	- 00259396
47000	29202218	21117599	- 00266809

Como se ve, los valores de k y a₀ de crecen continuamente con el crecimiento de las abscisas, y los valores absolutos de a₁, crecen con ellas, esto como simple observación no tiene en realidad importancia pero sí es muy significativo lo que ocurre con el valor de k. Este es un valor altamente *signaletico*, ya que el re

presenta para una poblacion definida, *el alcance numerico maximo a que puede llegar cuando se equilibran los recursos del area poblada con el numero de sus habitantes*. Y en los casos estudiados, con solo variar las abscisas del punto medio de acomodacion de la logistica, por tres años, el valor limite de k se rebaja en menos de la mitad, una poblacion saturada de 83 millones de habitantes se baja así rapidamente a otra de 39 millones. Es muy significativo este hecho para que le otorguemos un valor racional a esta curva en los objetivos del estudio, y si a ello agregamos que todavia dan ma aproximacion de ajuste los resultados obtenidos con la curva (18) (parabola logaritmica ajustada por minimos cuadrados) hemos llegado a un caso de inconformidad bien manifiesta sobre el valor de aceptacion que pudieramos conceder a la logistica concebida en su forma mas restringida, como es la de la ecuacion (23), por ejemplo. Parece, pues, necesario recurrir a formas de mayor elasticidad, a la forma general de las ecuaciones (26) o (32) antes estudiadas y muy probablemente con una limitacion del tercer grado en el valor de $F(x)$, como en el ejemplo que se transcribe en las ecuaciones (29) y (30) donde la logistica se aplica con gran propiedad, al perder su simetria con respecto al punto de inflexion P , figura 9.

Expuestos ya estos conceptos generales sobre la logistica de ecuacion (23), vamos a ver a continuacion el sistema de los minimos cuadrados

AJUSTE DE LA LOGISTICA POR EL SISTEMA DE LOS MINIMOS CUADRADOS

Aplicacion a la poblacion colombiana

El ajuste por minimos cuadrados de los casos contemplados en el aparte anterior llamado *Estudios de aplicacion*, proporciona desde luego una mayor regularidad a las series obtenidas, especialmente si se hace una mejor seleccion de los puntos que entran en los calculos

Para el caso 1° tendríamos

Puntos para el calculo

Obligados en la logistica

t	Ab	Pobl	
2A	0 000	2278	calculada por curva 18)
A	31 710	45124	
7	65 070	8702	observada

De Censos intermedios

3	29 915	4357	observada
1	36 668	7073	
5	13 296	7856	"

Para los calculos respectivos en la aplicacion de las ecuaciones normales del sistema numero (43), se hace la preparacion del cuadro numero XXXIX, en el cual el valor de $A = 0.0225840$ esta tomado de su respectivo valor a_1 en la ecuacion (49)

Aplicando ahora esos valores en las ecuaciones normales citadas, se obtiene

$$\begin{aligned} 6.0000B - 30776.400C + 444887.1271h &= 13220.94794 \\ 30776.4000B - 180269931.760C + 2724322761.4190h &= 67,20504382400 \\ 444887.1271B - 2724322761.419C + 42427972136.4815h &= 968,51980624600 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones dan

$$\begin{aligned} h &= 0.0003766 \\ B &= 2353.4594 \\ C &= 0.034681 \\ A + h &= 0.0229606 \end{aligned}$$

Este ultimo valor reemplaza el de A en la ecuacion (39), y el resultado final sera

$$A=0.0227810$$

CUADRO NUMERO XXXIX

PUNTOS	x	e ^{-Ax}	Σy	Σy ²	Σye ^{-Ax}	Σye ^{-Ax}
2A	0 000	1 000000	2278	5 189284 00	2278 000000	5 189284 000
3	29 965	0 508277	4355	18 966075 00	2213 546335	9 639994 289
3A	31 510	0 490846	4512 4	20 361753 76	2214 873490	9 994185 386
4	36 688	0 436677	5073	25 735329 00	2215 262421	11 238026 262
5	43 295	0 376138	5856	34 292736 00	2207 654128	12 898801 134
7	63 020	0 240931	8702	75 724804 00	2096 581567	18 241452 753
Sumas			30776 4	160 269931 76	13220 947936	87 205043 824

PUNTOS	Σye ^{-Ax}	Σxe ^{-Ax}	Σx ² e ^{-2Ax}	Σx ² y ² e ^{-2Ax}
2A	0 0000	0 000	0 000	0 0000
3	56328 9159	288 862428 745	146 822128 672	4399 525086 4955
3A	69791 2939	311 926231 594	151 580282 548	4810 821701 5750
4	81273 5477	412 300707 482	180 042236 049	6605 389554 3680
5	95366 7996	558 461918 458	210 061028 497	9091 802289 9360
7	132126 5100	1149 765412 140	277 014130 479	17457 430504 1100
Sumas	444887 1271	2724 322761 419	968 518806 246	42427 972136 4845

$$y = \frac{2353 4594}{0 034681 + e^{-0 0229606}} \quad (53)$$

Con los valores calculados se forma el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XL

PUNTOS	x	POBLACIÓN		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En %
2	— 2 490	2013 2	2168	+ 1248	+ 7 14
2A	0 000	2274 6	2278	+ 3 4	+ 0 15
3	29 965	1380 6	4323	— 296	— 0 59
3A	31 510	4528 1	4512 4	— 157	— 0 37
4	36 688	5057 3	5073	+ 157	+ 0 31
5	43 295	5814 7	5856	+ 413	+ 0 70
6	53 390	7171 2	7851	+ 679 8	+ 9 48
7	63 020	8717 8	8702	— 158	— 0 18
OTROS AÑOS	Medios cuadráticos en incluir los puntos 2 y 6			22 787	0 430
Enero 1 1770 1810 1830 Julio 1° 1940 1950 1960	— 165 490 — 65 490 — 15 490 + 65 010 + 75 010 + 85 010	208 519 518 9070 8 11031 4 13320 4	807 1020 1270	29 923 (1)	0 536 (1)

(1) Medios cuadráticos en incluir los puntos 2 y 6
la (49)

La poblacion observada que se anota para los años de 1770 a 1830, corresponden a calculos graficos aproximados sobre la curva de ensayo Y Z A C Lamina II

El valor de k en la ecuacion (53) es

$$k = \frac{B}{C} = \frac{2353.4594}{0.034681} = 67860.194$$

En la ecuacion correspondiente en el caso 1° teniamos $k = 82941.374$

Estos valores de k son muy exagerados, y habran de rebajarse en ajustes posteriores

Observe en las dos ultimas columnas

del cuadro anterior, la mayor regularidad en las series de valores, con respecto a las obtenidas con la ecuacion (49)

De un modo analogo podemos tratar los casos 3° y 4° antes estudiados, para lo gisticas de tres puntos obligados, a fin de adquirir material de comparacion asi

Para el caso 3°

P t d	Ab c a	P 11 6	
2C	0 000	2778 7	calculada por ecuacion (18)
3	19 609	4355	observada
4	26 332	5073	
5	32 940	5856	
7	52 664	8702	

$$A=0.0259396$$

CUADRO NUMERO XLI

PUNTOS	x	e^{-Ax}	$\sum y$	$\sum x$	$\sum ye^{-Ax}$	$\sum x^2 e^{-Ax}$
2 C	0 000	1 000000	27 87	7 721173 69	2778 700000	721173 690
3	19 609	0 601308	4355	18 966025 00	2618 696340	11 401422 561
4	26 332	0 505076	5073	25 735329 00	2567 250548	12 998297 030
5	32 940	0 425517	5856	31 297736 00	2491 827552	14 592142 145
7	52 664	0 255104	8702	75 724804 00	2219 915008	19 317700 400
Sumas			26764 7	182 440067 69	12671 389448	66 033735 826

PUNTOS	$\sum ye^{-Ax}$	$\sum xy e^{-Ax}$	$\sum xy^2 e^{-2Ax}$	$\sum x^2 y^2 e^{-2Ax}$
2 C	0 0000	0 000	0 000	0 000
3	51350 0165	223 629321 858	134 470100 293	2636 824196 783
4	6 469 1814	342 271157 242	172 872945 994	4257 090440 404
5	87080 7996	480 665162 458	204 531197 952	6737 257652 120
7	116909 6040	1017 347374 008	259 529384 497	13667 855505 308
Sumas	317809 6015	2063 913015 566	771 403629 736	27594 027804 615

Con estos datos se forma el cuadro preliminar numero XLII, de donde se deduce el sistema de ecuaciones normales

$$\begin{aligned} 5.0000B - 26764.700C + 317809.6015h &= 12671.389448 \\ 26764.7000B - 162,440067.690C + 2063,913015.566h &= 66,033735.826000 \\ 317809.6015B - 2063,913015.566C + 27594,027804.615h &= 771,403629.736000 \end{aligned}$$

Este sistema se resuelve en los siguientes valores

$$\begin{aligned} h &= -0.0000840 \\ B &= 3032.4569 \\ C &= 0.0920690 \\ A + h &= 0.0258556 \end{aligned}$$

Finalmente la ecuación buscada seria

$$y = \frac{3032.4569}{0.0920690 + e^{-0.0258556x}} \quad (34)$$

Con el calculo de los valores correspondientes se producen los datos del cuadro siguiente

CUADRO NUMERO XLII

PUNTOS	X	POBLACION		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En %
2	— 15 846	19043	2168	+ 2637	+ 1216
2C	0 000	27768	2778	— 19	+ 007
3	19 609	13671	4355	— 121	— 028
4	26 332	50687	5073	+ 43	+ 008
5	32 940	58455	5856	+ 105	+ 018
6	43 034	72073	7851	+ 6137	+ 893
7	52 664	8 063	5702	— 43	— 005
OTROS AÑOS	Medios cuadraticos sin incluir los puntos 2 y 6			7 709	0158
				7 823 (1)	0172 (1)
Enero 1				(1) Med d t c espe t g la l g t a l e 3 p tos bl g d s e l c (51)	
1770	— 115 846	148	807		
1810	— 75 846	421	1020		
1830	— 55 846	702	1270		
Julio 1					
1940	+ 54 654	90398			
1950	+ 64 654	108301			
1960	+ 74 654	127851			

La poblacion observada entre 1770 y 1830, con las mismas anotaciones del cuadro numero XL

El valor de k para la ecuacion (54) seria

$$k = \frac{B}{C} = \frac{30324569}{00920690} = 32936780$$

En la ecuacion correspondiente del caso 3º tenemos $k = 32234194$

Hay correspondencia entre estos dos valores, pero son todavia muy elevados numericamente

En las dos ultimas columnas del cuadro anterior, continua verificandose la mayor regularidad de la serie ajustada por

cuadrados minimos, con respecto a la obtenida por la ecuacion (51), como claramente se indica con el valor de los medios cuadraticos

Para el caso 4º

P tos	Absc sa	Poblac n
2D	0 000	31534 calculada por la ecuacion (51)
3	13 965	4355 observada
4	20 688	5073
4D	23 510	53964 calculada por la ecuacion (18)
5	27 296	5856 observada
7	47 020	8702

Con estos datos se forma el cuadro numero XLIII como preliminar para el calculo Las ecuaciones normales serian

$$\begin{aligned} 60000B - 32535800C + 363946986h &= 172655612 \\ 325358000B - 193783958520C + 2322046649320h &= 915329092300 \\ 3639469860B - 2322046649320C + 29570813230210h &= 10052676802120 \end{aligned}$$

De donde se obtienen

$$\begin{aligned} h &= -000003172 \\ B &= 35296900 \\ C &= 01199 \\ A + h &= 00266492 \end{aligned}$$

Y la ecuacion

$$y = \frac{35296900}{01199 + e^{-00266492}} \quad (55)$$

Con la cual se calculan los datos del cuadro numero XLIV

A=0 0266809

CUADRO NUMERO XLIII

PUNTOS	x	e Ax	Σ x	Σ y ²	Σ ye Ax	Σ ye ² Ax
2D	00 000	1 000000	3153 4	9 943931 56	3153 400000	9 943931 560
3	13 965	0 688942	4355	18 966025 00	3000 342410	13 066491 190
4	20 688	0 575812	5073	25 735329 00	2921 094276	14 818711 262
4D	23 510	0 534048	5396 4	29 121132 96	2881 936627	15 552082 815
5	27 290	0 482737	5856	31 292736 00	2826 907872	16 504372 498
7	47 020	0 285208	8702	75 724804 00	2481 880016	21 097319 899
Sumas			32535 8	193 783958 52	17255 561201	91 532909 230

PUNTOS	Σ ye ^{-Ax}	Σ ye Ax	Σ ye ² Ax	Σ x ² ye ² Ax
2D	0 0000	0 000	0 000	0 000
3	41899 7818	182 473549 739	125 713092 277	1705 591712 970
4	60431 5984	306 539498 683	170 526395 185	3651 978084 586
4D	67754 3301	360 629466 952	195 203685 592	4590 649248 456
5	77153 2773	451 868151 869	218 133476 044	5954 171360 896
7	116697 9984	1015 505982 077	289 030430 114	13618 422823 302
Sumas	363946 9860	2322 046649 320	10005 267680 212	29570 813230 210

CUADRO NUMERO XLIV

PUNTOS	x	POBLACION		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En %
2	- 21 190	1864 7	2168	+ 303 3	+ 13 99
2D	0 000	3153 8	3153 4	+ 16	+ 0 00
3	13 965	4362 2	4355	- 7 2	- 0 17
4	20 688	5070 7	5073	+ 2 3	+ 0 00
4D	23 510	5394 3	5396 4	+ 2 1	+ 0 04
5	27 290	5853 1	5856	+ 2 9	+ 0 00
6	37 390	7216 7	7801	+ 634 3	+ 8 79
7	47 020	8703 9	8702	- 1 9	- 0 02
OTROS AÑOS	Medios cuadratico sin incluir los puntos 2 y 6			3 061	0 080
Enero 1				4 102 (1)	0 091 (1)
1770	- 121 190	138	807		
1810	- 81 190	397	1020		
1830	- 61 490	670	1270		
Julio 1					
1940	+ 49 01	9032 3			
1950	+ 59 01	10780 6			
1960	+ 69 01	12191 9			

La poblacion entre 1770 a 1830 calcula da graficamente

El valor de k asi

k = B / C = 29438 610

k=29209 218 en la ecuacion (2)

En las dos ultimas columnas se mues

tra la mayor aproximacion del ajuste por minimos cuadrados

El ajuste de los ultimos tres casos nos suministra material suficientemente claro para proponer una reforma sustancial en los metodos de calculo por curvas logisti cas, en efecto, del cuadro numero XLV se deducen las siguientes conclusiones

CUADRO NUMERO XLV

TRES CASOS EN LOS ESTUDIOS DE APLICACIÓN	POBLACIÓN EN MILFS				
	1	2	3	Poblacion calculada sobre la curva Y Z A C	Poblacion segun la curva (18) (1)
AÑOS	POBLACIÓN AJUSTADA POR MÍNIMOS CUADRADOS			POBLACIÓN CALCULADA	
Enero 1					
1770	205	148	137	807	
1810	519	421	397	1020	
1830	818	702	670	1270	
Julio 1					
1940	9071	9040	9032		9030
1950	11031	10840	10781		10791
1960	13320	12785	12492		12712
	VALORES DE k			(1) Lo	l p d
Para tres puntos obligados	82941	32231	29209		9079 00
Para ajuste	67860	32937	29139		10791 60
					1 41 840

Primera Los valores de k difieren en general muy poco entre si, cuando se comparan los de las curvas primitivas con los obtenidos por ajuste de las mismas pero van disminuyendo a medida que la zona de los puntos obligados se retira a la de fecha del año de 1870. Es pues necesario fijar su verdadero valor, en los estudios que siguen, averiguando la causa de estas anomalías, que no es posible aceptar para una constante de valor signalético tan importante, ya que marca el límite de crecimiento de una población definida y limitada dentro de un área fija.

Segunda Los valores de población obtenidos para el año de 1870 y hacia atrás, hasta 1830, se separan cada vez mas de los calculados en la curva Y Z A C. La mina II, hasta tal punto que en los ajustes del caso 3° los obtenidos son apenas el 17%, el 39% y el 66% de los que pudiéramos llamar aceptables, según se refieran a los años de 1770 1810 y 1830. Aunque para estos años los cambios en la superficie del país no permiten una comparabilidad muy precisa, si se indica claramente con las divergencias halladas la necesidad de cambiar los métodos de cálculo. Esto explica la gran divergencia entre los diversos valores de k .

Tercera Si observamos la población extrapolada o extracensal entre 1940 y 1960 se advierte que la del caso 3° se aproxima bastante a la obtenida por la parabo-

la logaritmica curva (18), es decir, que para los próximos 20 años venideros, no hay una gran diferencia en el cambio de las curvas parabólicas por la de la forma logística anotada.

Cuarta Las observaciones de las dos últimas conclusiones imponen una modificación en los cálculos, tendiente a orientar los resultados para que se aproximen en lo posible a la curva Y Z A C. Tal es el objeto del estudio siguiente.

ESTUDIOS DE LA LOGISTICA A BASE DE UNA POBLACION INICIAL

Cuando se trata de acomodar puntos censales a una curva logística, se requiere ante todo un estudio de reducción a una misma área poblada por un tiempo lo mayor posible, pero siempre se llega a un límite retrospectivo, en que ni los datos históricos, ni los de cualquiera otra clase, permiten continuar la investigación, y en este punto se encuentra naturalmente una población inicial de la cual se debe partir. El método de cálculo debe referirse entonces al empleo de una de las formas de la logística expresadas en las ecuaciones (31) o (32).

En cuanto al modo de proceder, basta aplicar los resultados que se obtengan de la técnica de dichas dos ecuaciones, que aunque presenta relativas dificultades, trataremos de obviarlas en lo posible, mas

adelante, pero tambien se usan procedimientos aproximados, suficientemente aceptados

Los procedimientos aproximados se basan en la eleccion de una *asintota muy cercana* a la poblacion inicial que deba tomarse como punto de partida

En el caso nuestro, la poblacion inicial era la anotada para el punto Y, Laminilla II, que fue registrada con un valor de 806,641 habitantes, en el Capitulo I de este estudio, la asintota elegida trata de indicar que hacia atras, en el tiempo, la poblacion es una funcion casi constante, o cuyas variaciones, para buscar una tangencia al infinito, dejan de pesar como datos de influencia en el futuro. Este procedimiento aproximado es aplicable a casi todas las poblaciones del mundo que se han sometido a estos procedimientos de calculo

Antes de ensayarlo para la poblacion colombiana, estudiaremos la solucion que puede aplicarse a las ecuaciones (31) y (32)

FORMULAS CON LOS DATOS DE POBLACION INICIAL

Corresponden estas formulas a las citadas, numeros (31) y (32). De ellas estudiaremos especialmente la primera. La tecnica de esta ecuacion puede establecerse para tres puntos, cuando se supone el valor de la poblacion inicial, o sea el valor de la constante p , y para cuatro puntos, cuando haya de calcularse este ultimo valor

Estudiaremos sucesivamente

La ecuacion para tres puntos obligados
Aplicaciones generales

La ecuacion para cuatro puntos obligados

a) *Estudio de la ecuacion para tres puntos*

Sean los puntos $(y_0, 0)$, (y_1, x_1) e $(y_2, 2x_1)$ de equidistancia horizontal, con relacion al tiempo

La ecuacion (31) puede escribirse en la forma

$$a_0 + a_1 x = \text{Log} \frac{k+p-y}{y-p} \quad (\text{Logs neperianos})$$

$$\left. \begin{aligned} Bn &= C \sum (y-p) + h \sum x (y-p) e^{-A} = \sum (y-p) e^{-A} \\ B \sum (y-p) &= C \sum (y-p)^2 + h \sum x (y-p)^2 e^{-A} = \sum (y-p)^2 e^{-A} \\ B \sum x (y-p) e^{-A} &= C \sum x (y-p)^2 e^{-A} + h \sum x^2 (y-p)^2 e^{-2A} = \sum x (y-p)^2 e^{-2A} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Y reemplazando los valores anteriores

$$a_0 = \text{Log} \frac{k+p-y_0}{y_0-p}$$

$$a_0 + a_1 x_1 = \text{Log} \frac{k+p-y_1}{y_1-p}$$

$$a_0 + 2a_1 x_1 = \text{Log} \frac{k+p-y_2}{y_2-p}$$

Por eliminaciones

$$a_1 x_1 = \text{Log} \frac{(k+p-y_1)(y_0-p)}{(k+p-y_0)(y_1-p)}$$

$$a_1 x_1 = \text{Log} \frac{(k+p-y_2)(y_1-p)}{(k+p-y_1)(y_2-p)}$$

De aqui los valores

$$a_0 = \text{Log} \frac{k+p-y_0}{y_0-p} \quad (56)$$

$$a_1 = \frac{1}{x_1} \text{Log} \frac{(k+p-y_1)(y_0-p)}{(k+p-y_0)(y_1-p)} \quad (57)$$

Para el valor de k

$$\frac{(k+p-y_1)(y_0-p)}{(k+p-y_0)(y_1-p)} = \frac{(k+p-y_2)(y_1-p)}{(k+p-y_1)(y_2-p)}$$

De donde se deduce

$$k = \frac{(y_0-p) + (y_2-p) - 2R(y_1-p)}{1-R} \quad (58)$$

En cuyo caso,

$$R = \frac{(y_0-p)(y_2-p)}{(y_1-p)}$$

Para que el valor de k sea positivo, se requiere ademas, que

$$y_1 - p > \sqrt{(y_0-p)(y_2-p)} \quad (58a)$$

que es la misma condicion antes establecida para la posibilidad del problema, cuando las ordenadas se miden sobre la linea horizontal de la asintota inferior

De aqui que $R < 1$

Para hacer el ajuste por minimos cuadrados de esta nueva forma, bastaria cambiar en la ecuacion (49) a y por $y-p$, y el nuevo sistema de ecuaciones normales seria

b) Aplicaciones generales

Para una primera aplicacion, tomamos

1° Los puntos obligados del caso 3° que son

$$\begin{aligned}x_0 &= 0\ 000 & y_0 &= 2778\ 7 \\x_1 &= 26\ 332 & y_1 &= 5073 \\2x_1 &= 52\ 664 & y_2 &= 8702\end{aligned}$$

2° Usamos el valor de 800 para ordenada de la asintota inferior, de acuerdo con lo establecido antes respecto de este valor, es decir, un valor muy cercano, pero siempre menor que la poblacion que pudieramos llamar inicial

CUADRO NUMERO XLVI

PUNTO	N	POBLACION		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En %
2	- 15 846	1987 7	2168	+ 178 3	+ 8 22
2C	0 000	2778 7	2778 7	0 0	0 00
3	19 600	4324	4327	+ 2 6	+ 0 06
4	26 332	5073	5073	0 0	0 00
5	32 940	5875	5856	- 17 0	- 0 29
6	43 034	7253	7851	+ 598 0	+ 8 24
7	52 664	8702	8702	0 0	0 00
OTROS AÑO	Medio cuadratico sin incluir los puntos 2 y 6			7 691	0 132
Enero 1					
1770	- 115 846	838	807	+ 31	+ 3 8
1810	- 75 846	913	1020	- 67	- 6 5
1830	- 77 846	1107	1270	- 163	- 12 8
Julio 1				<i>Parabola logaritmica</i>	
1940	+ 54 654	9011		9030	
1950	+ 64 654	10576		10791	
1960	+ 74 654	12088		12742	

Llegados a este punto encontramos una completa transformacion en la estructura de la ecuacion fundamental que deba interpretar el desarrollo de la poblacion. En primer lugar, se observa que la curva pasa por debajo de las poblaciones de 1830 y 1810 y luego por encima de la de 1770. En el siglo que se historia desde 1770 hasta 1870, las diferencias relativas encontradas con este nuevo calculo pueden considerarse de una aceptacion corriente si se tienen en cuenta la vaguedad y cambios de la superficie territorial considerada y los medios incipientes e imperfectos del recuento de la poblacion, que pudieron emplearse.

Segun las formulas anteriores

$$a_0 = \text{Log} \frac{15858\ 633}{1978\ 7} = 2\ 0812741$$

$$a_1 = \frac{1}{x_1} \text{Log} 0\ 3960771 = -0\ 0351719$$

R = 0 85635 que en la expresion (58) da finalmente

$$k = 17837\ 333$$

De aqui la ecuacion

$$y = 800 + \frac{17837\ 333}{1 + e^{2\ 081\ 741 - 0\ 0351719}} \quad (60)$$

Calculada para varios puntos de observacion censal presenta los resultados del cuadro numero XLVI

Entre 1870 y 1938, puntos 2 a 7 del cuadro XLVI, los valores obtenidos solo presentan diferencias apreciables con los de la observacion, en los puntos 2 y 6. Si prescindimos de este ultimo, nos queda por analizar la divergencia con el punto 2.

De acuerdo con el criterio establecido al principio, de aceptar los menores valores posibles en la extrapolacion, tambien se ha alcanzado este objetivo como puede verse con los calculados para 1940, 1950 y 1960.

Es conveniente, finalmente, ver como los *medios cuadraticos* de las dos ultimas columnas continuan presentando meno

res divergencias en las series calculadas, en efecto

CASOS COMPARADOS	MEDIOS CUADRATICOS	
	Absolutos	En %
Para el caso N° 3 a tres puntos	7 823	0 172
Para el mismo caso anterior con ajuste por minimos cuadrados	7 709	0 158
Para el caso en estudio de la ecuacion (60)	7 691	0 132

Podemos concluir, de consiguiente, que es este un ensayo afortunado del estudio, que nos indica claramente la ventaja de preferir los calculos a base de una poblacion inicial, que hemos tomado de 800,000 habitantes de acuerdo con los mas antiguos apuntes historicos de nuestra poblacion, en las vecindades del año de 1770

Este nuevo metodo de calculo tiene la ventaja, ademas de permitir que nuevos puntos de la observacion censal que antes no podian pertenecer a las logisticas estudiadas, ahora si correspondan a estas otras, de poblacion inicial. En el caso de la figura 12, por ejemplo, los puntos 2 y 3 quedaron excluidos, cuando la asintota partia de una poblacion nula, pero al admitir la poblacion inicial de 800,000 habitantes, el punto 2 con su poblacion registrada de 2168, en miles, es ya aprovechable de acuerdo con el siguiente analisis

	Ab	¹ (18)
Punto 2	2 000	
Punto 7	70 510	
Diferencia	68 510	
Equidistancia	34 255	

Coordenadas para una logistica con origen en el punto 2

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & y_0 &= 2168 \\ x_1 &= 34\,255 & y_1 &= 4238 \end{aligned} \quad \text{segun la ecuacion (18)}$$

$$2x_1 = 68\,510 \quad y_2 = 8702$$

El valor de y_1 se obtiene en la ecuacion (18) con abscisa de $x = 36,255$ con origen en D_2 , Lamina II, ya que esta curva fue ajustada con gran aproximacion para interpolacion entre los datos observados, especialmente en las proximidades de esta ultima abscisa

Si aplicamos los datos anteriores a la condicion

$$y_1 - p > \sqrt{(y_0 - p)(y_2 - p)}$$

que fue deducida de la expresion (58), obtenemos

$$\begin{aligned} (4238 - 800)^2 &= 11,819844 \\ (2168 - 800)(8702 - 800) &= 10\,809936 \end{aligned}$$

Es posible, por lo tanto, el paso de una nueva logistica por los puntos extremos 2 y 7, y uno intermedio de interpolacion entre los respectivos datos censales

Para el caso tendríamos

$$R = \frac{(y_0 - p)(y_2 - p)}{(y_1 - p)^2} = 0.914558$$

$$k = \frac{(y_0 - p) + (y_2 - p) - 2R(y_1 - p)}{1 - R} = 34895.00$$

y de las expresiones (56) y (57)

$$\begin{aligned} a_0 &= 3\,199\,000 \\ x_1 &= 0.028\,7628 \end{aligned}$$

De aqui la ecuacion

$$y = 800 + \frac{34895}{1 + e^{3\,199\,000 - 0.028\,7628x}} \quad (61)$$

Calculada para los valores que venimos estudiando se encuentran los resultados del cuadro numero XLVII

CUADRO NUMERO XLVII

PUNTOS	x	POBLACIÓN		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En %
2	0 000	2168 0	2168	0 0	0 00
2A ₁	34 255	4238 0	4238	0 0	0 00
3	34 175	4346 5	4355	+ 85	+ 0.20
4	12 178	5011 7	5073	+ 61 3	+ 1.21
5	48 786	5767 9	5856	+ 88 1	+ 1.50
6	58 880	7137 1	7851	+ 713 6	+ 10.00
7	68 510	8702 0	8702	0 0	0 00
OTROS AÑOS	Medios cuadraticos con excepcion del punto 6			43 953	0.791
Enero 1°	—			Gran aproximacion con la poblacion calculada	
1770	— 100	880	807		
1810	— 60	1052	1020		
1830	— 40	1245	1270		

Con el calculo anterior solo se ha de mostrado la posibilidad de acomodar el punto 2 en curvas logisticas a partir de una asintota mas elevada en cuanto a precision se ha perdido terreno, puesto que los valores de los medios cuadraticos de los residuales entre poblaciones calculadas y observadas han aumentado de valor con respecto a los obtenidos en ensayos anteriores

En vista de la divergencia que muestra el cuadro numero XLVI con respecto a este punto 2 y el acomodo de esta ultima logistica que requiere correcciones positivas para los puntos 3 4 y 5 principalmente lo que implica crecimiento en los valores de la extrapolacion hay gran conveniencia en suponer para dicho punto 2 un valor ideal de 2000 que facilmente puede corresponder a la verdadera poblacion de 1870, en vez de la expresada por el

numero 2168, ya que este dato fue levantado en una serie de periodos que se reparten en un lapso total de cerca de dos años, de acuerdo con los apuntes historicos consultados

En tal caso, y siguiendo el procedimiento ya descrito

$$\begin{aligned}x_0 &= 0\ 000 & y_0 &= 2000 \\x_1 &= 34\ 255 & y_1 &= 4238 \\2x_1 &= 68\ 510 & y_2 &= 8702\end{aligned}$$

$$R = 0\ 802244$$

$$k = 18132\ 296$$

$$a_0 = 2\ 646901$$

$$x_1 = -0\ 034866$$

Y por consiguiente

$$v = 800 + \frac{18132\ 296}{1 + e^{2\ 646901 - 0\ 034866}} \quad (63)$$

y el cuadro de calculos respectivo

CUADRO NUMERO XLVIII

PUNTOS	x	POBLACIÓN		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En %
2	0 000	2000	2000	0 0	0 00
2A ₁	34 255	42 8	4238	0 6	0 00
3	34 455	4356 1	4355	- 1 1	- 0 03
4	42 178	5071	5075	- 1 0	- 0 02
5	48 786	5871 7	5856	- 15 7	- 0 27
6	58 880	7250	7851	+ 601 0	+ 8 29
7	68 510	8702	8702	0 0	0 00
OTROS AÑOS	Medios cuadraticos sin incluir el punto 6			6 438	0 111
Enero 1º	- 100	839	807	Calculados por la parabola logaritmica de la curva (18)	
1770	- 60	957	1020		
1810	- 40	1113	1270		
Julio 1	70 50	9013		9030	
1940	80 50	10589		10791	
1950	90 50	12123		12742	

Esta ultima ecuacion corresponde a una curva que se acomoda hacia atras de 1870 con gran precision, da muy buena adaptacion entre 1870 y 1938 y ademas valores bajos de extrapolacion con relacion a los de la parabola logaritmica

Podemos ajustarla por minimos cuadrados, como sigue

Primero el calculo del cuadro preliminar numero XLIX, de donde se deduce el sistema de ecuaciones normales

$$\begin{aligned}6\ 0000B - 25424\ 0000C + 208390\ 7189h &= 5903\ 7701 \\25424\ 0000B - 132\ 161138\ 0000C + 1049,883735\ 8167h &= 23,281797\ 5466 \\208390\ 7189B - 1049\ 883735\ 8167C + 8822,155861\ 9160h &= 193,179125\ 0327\end{aligned}$$

Estas ecuaciones dan

$$h = -0.0000523$$

$$B = 1285.0865$$

$$C = 0.070636$$

$$A = 0.034866$$

CUADRO NUMERO XLIX

PUNTOS	x	e ^{Ax}	Σ (x d)	Σ (x d) ²	Σ (x d)e ^{Ax}	Σ (x d) ² e ^{Ax}
2	0.000	1.000000	1200	1.440000	1200.000000	1.440000.0000
2A	34.255	0.302905	3438	11.819844	1041.387390	3.580289.8468
3	35.455	0.290193	3555	12.638025	1032.702615	3.671257.7963
4	42.178	0.229793	4273	18.258529	981.905489	4.195682.1545
5	48.785	0.182506	5056	25.563136	922.750336	4.663425.6988
7	68.510	0.091752	7902	62.441604	725.024304	5.729142.0502
Sumas			25424	132.161138	5903.770134	23.281797.5466

PUNTOS	Σ x (y d)e ^{Ax}	Σ x (x d) ² e ^{Ax}	Σ x (x d) ² e ^{2Ax}	Σ x (x d) ² e ^{2Ax}
2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2A	35672.7250	122.6428285.00	37.149125.9971	1272.54311.1300
3	36614.4712	130.164445.1160	37.811860.1504	1340.619501.6183
4	41414.8097	176.965481.8481	40.665428.9593	1715.186492.6749
5	45017.2979	27.607459.1824	41.539726.7652	2026.557110.2012
7	49671.4151	392.503522.1202	36.012983.1597	2167.249475.2916
Sumas	208390.7189	1049.883735.8167	193.179125.0327	8822.155861.9160

$$k = \frac{B}{C} = 18193.0814$$

facilmente transformable en

$$A + h = 0.034814$$

$$y = 800 + \frac{18193.0814}{1 + e^{(50.1 - 0.034814)}}$$

y por ende, la ecuacion

$$y = 800 + \frac{1285.0865}{0.070636 + e^{-0.034814}}$$

(63) Para los calculos acostumbrados se forma el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO L

PUNTOS	x	DIFERENCIA		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Abolutas	Ln /
2	0.000	2000.3	2000	- 0.3	0.02
2A	34.255	4237.5	4238	+ 2.7	+ 0.06
3	35.455	1353.2	1353	+ 1.8	+ 0.01
4	42.178	5070.3	5073	+ 2.7	+ 0.05
5	48.786	5867.3	5856	- 11.3	- 0.19
6	58.880	7245.1	7851	+ 605.9	+ 8.36
7	68.510	5697.8	8702	+ 4.2	+ 0.05
OTROS AÑOS	Medios cuadráticos sin incluir el punto 6			216	0.088
Enero 1				Calculados por la parabola logaritmica de la curva (18)	
1770	- 100	839	807		
1810	- 60	958	1020		
1830	- 40	1114	1270		
Julio 1				9030	
1940	70.50	9009		10791	
1950	80.50	10588		12742	
1960	90.50	12126			

Como puede observarse en las dos ultimas columnas las diferencias o correcciones de los valores calculados con respecto a los observados son insignificantes, acusando asi un magnifico ajuste de la curva

Ademas los valores de interpolacion hacia atras del año de 1870 y los de extrapolacion por 20 años despues de 1940, es tan bastante ajustados a los mas probables datos obtenibles. Esto nos induce a considerar que el mas probable valor de k estara muy proximo a 18200 en numeros redondos

Para precisar mas el acomodo de la logistica, trataremos finalmente el estudio con cuatro puntos y una poblacion inicial, y luego, se expondra la serie de operaciones sucesivas que nos llevarian al alcance final de la mejor ecuacion aprovechable a los fines que se expusieron al iniciar este estudio

c) Estudio de la ecuacion para cuatro puntos

Se usa este metodo cuando deban considerarse como desconocidas las constantes a_0 , a_1 , k y p de la ecuacion (31)

Sean los cuatro puntos conocidos, por los cuales se va a obligar el paso de una logistica

$$(0, y_0), (x_1, y_1), (2x_1, y_2) \text{ y } (3x_1, y_3)$$

Continuamos su aplicacion sobre la ecuacion (31) en su forma

$$a_0 + a_1 x = \text{Log} \frac{k+p-y}{y-p}$$

Reemplazando los puntos anteriores

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \text{Log} \frac{k+p-y_0}{y_0-p} \\ a_0 + a_1 x_1 &= \text{Log} \frac{k+p-y_1}{y_1-p} \\ a_0 + 2a_1 x_1 &= \text{Log} \frac{k+p-y_2}{y_2-p} \\ a_0 + 3a_1 x_1 &= \text{Log} \frac{k+p-y_3}{y_3-p} \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

De aqui los valores

$$a_0 = \text{Log} \frac{k+p-y_0}{y_0-p} \text{ ya conocido} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{x_1} \text{Log} \frac{(k+p-y_1)(y_0-p)}{(k+p-y_0)(y_1-p)} \\ &= \frac{1}{x_1} \text{Log} \frac{(k+p-y_2)(y_1-p)}{(k+p-y_1)(y_2-p)} \\ &= \frac{1}{x_1} \text{Log} \frac{(k+p-y_3)(y_2-p)}{(k+p-y_2)(y_3-p)} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

El valor de k como antes resulta de las tres primeras ecuaciones del sistema (64), en su forma conocida de la expresion (58), y ademas por comparacion en los valores de a_1 , en el sistema (65), asi

$$\frac{(k+p-y_1)(y_0-p)}{(k+p-y_2)(y_3-p)} = \frac{(k+p-y_1)(y_0-p)}{(k+p-y_0)(y_1-p)}$$

Que puede escribirse en la forma

$$\frac{k-(y_3-p)}{k-(y_2-p)} = \frac{(y_0-p)(y_3-p)}{(y_1-p)(y_2-p)} \left[\frac{k-(y_1-p)}{k-(y_0-p)} \right]$$

Haciendo

$$\frac{(y_0-p)(y_3-p)}{(y_1-p)(y_2-p)} = R'$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} k^2 - k[(y_3-p) + (y_0-p)] &= \\ &= R' [k^2 - k[(y_1-p) + (y_2-p)]] \end{aligned}$$

O sea

$$k = 0$$

$$k = \frac{(y_3-p) + (y_0-p) - R'[(y_1-p) + (y_2-p)]}{1-R'} \quad (66)$$

Antes de seguir adelante, observamos que para el valor positivo de k se requiere $R' < 1$ lo que da

$$(y_1-p)(y_2-p) > (y_0-p)(y_3-p) \quad (66a)$$

De manera que las condiciones de posibilidad del problema con cuatro puntos obligados estan dadas por las expresiones (58a) y (66a)

Los valores de k , (58) y (66) se deben promediar en los casos de aplicacion asi como tambien los de a_1 , por la circunstancia especial de que los valores de p se buscan, como lo veremos adelante, solo de una manera aproximada, lo que naturalmente es suficiente para los fines generales y practicos del estudio

Con los valores (58) y (66) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{(y_0-p) + (y_2-p) - 2R'(y_1-p)}{1-R} &= \\ &= \frac{(y_0-p) + (y_3-p) - R'[(y_1-p) + (y_2-p)]}{1-R'} \end{aligned}$$

Y de aqui, despues de varias transformaciones

$$(y - y_1)(y_1 - p)(y_2 - p) - (v_1 - v_0)(y_0 - p)(y - p) + \\ + R[(y_2 - y_1)(y_1 - p)(y_3 - p) - (y_0 + y - 2y_1)(y_1 - p)(y_2 - p)] = 0 \quad (67)$$

En que

$$R = \frac{(y_0 - p)(y_2 - p)}{(y_1 - p)^2} \text{ como antes}$$

Si hacemos el primer miembro de la expresion (67) igual a $f(p)$, tendremos

$$f(p) = 0 \quad (68)$$

Que es la condicion requerida para encontrar el valor de p

Como se trata de una expresion complicada, para la obtencion de dicho valor vamos a indicar un metodo grafico de solucion, suficientemente aproximado para los efectos practicos de este trabajo

Consiste en suponer un valor de p que se aproxime al que realmente se vea como probable en la grafica de la poblacion, en nuestro caso, por ejemplo, seria el valor

$$p = 800 \text{ (Lamina I)}$$

Con este valor se calcula el de $f(p)$ de la expresion (68) y se anota el resultado, que llamaremos p_0 , de la misma manera se calculan otros valores p_1, p_2 , etc unos hacia atras y otros hacia adelante del pri

mer numero supuesto hasta obtener el paso de valores positivos a negativos o vice versa. Estos valores de $f(p)$ se colocan graficamente hacia arriba y hacia abajo (positivos y negativos) perpendiculares a una linea horizontal en donde se marcan los valores de p finalmente la linea continua que une los extremos de estas ordenadas, corta la horizontal en un valor que aproximado por simple medicion grafica, da el que se necesita de p con la aproximacion requerida para un trabajo de interpolacion censal

Vamos a exponer un ejemplo que sera de aplicacion posterior, para de esta manera adelantar el trabajo

Sean los cuatro puntos elegidos para el paso de una logistica

$$\begin{aligned} x_0 &= 0000 & y_0 &= 2001 \\ x_1 &= 22837 & y_1 &= 3261 \\ 2x_1 &= 45673 & y &= 5480 \\ 3x_1 &= 68510 & y_2 &= 8702 \\ & & y_1 - y_0 &= 3221 \\ & & y_2 - y_1 &= 1221 \\ & & v - y_1 &= 2220 \\ & & y + y - 2y_1 &= 4220 \end{aligned}$$

$$f(p) = 3221(v_1 - p)(y_2 - p) - 1221(v_0 - p)(y_3 - p) + R[2220(y_0 - p)(y_3 - p) - 4220(y_1 - p)(y_2 - p)]$$

Para varios valores de p se forma el cuadro siguiente, que da los valores de $f(p)$

CUADRO NUMERO LI

CALCULOS PRELIMINARES	VALORES DE p			
	$p=796$	$p=798$	$p=800$	$p=802$
$(y_1 - p)(y_2 - p)$	11 510060	11 531766	11 517480	11 503202
$(v_0 - p)(y_3 - p)$	9 526730	9 508512	9 490302	9 472100
$(y_0 - p)(y_3 - p)$	0 928902	0 928171	0 928038	0 927603
$(y_1 - p)^2$				
$f(p)$ en millones	-7 346	-0 797	+5 790	+12 416

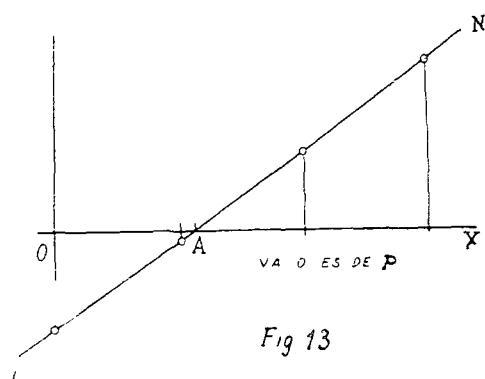
Los valores de $f(p)$

$f(p)$	Primera diferencia
-7 316	
-0 797	-6 519
-5 790	-6 587
-12 416	-6 626

En estos valores es sensible la constancia que se observa en sus primeras diferencias lo que demuestra que pertenecen a un arco de curva sumamente amplia, casi en línea recta

En efecto en la Figura 13 están colocado como ordenadas sobre la horizontal OX y la curva MN , que pasa por estos cuatro puntos, se confunde con una línea recta a la simple vista por lo menos

Horizontalmente están medidos los valores de p y verticalmente los de $f(p)$



La parte OA corresponde a un valor de $p = 798.26$ o aproximadamente 798.3

De esta manera es posible como se ve aproximar el valor de p sin la complicación que implicaría el tratamiento de la expresión (67) por otros medios de cálculo

APROXIMACIONES SUCESIVAS EN BUSCA DE UNA ECUACION FINAL

La última etapa de aproximaciones para una ecuación de cuatro constantes se hace según la última forma de ecuación estudiada para cuatro puntos.

El método general consiste primero en obtener, como ya lo hicimos una ecuación de la parábola logarítmica ajustada por mínimos cuadrados, como la de la ecuación

(18), en donde se eligen cuatro puntos generalmente interpolados o por lo menos los dos medios, entre la serie de los cuatro necesarios, para por sobre ellos hacer pasar una logística

Estos cuatro puntos han de tener necesariamente equidistancia horizontal, en el eje de los tiempos

Los puntos deben ser elegidos de tal modo que al calcular a p , su valor se aproxime a las condiciones de una probable o visible población inicial. Si ello no ocurre, debe investigarse el porqué y tratar de introducir las condiciones de variación que el caso permita

El estudio de una primera curva que pase por los cuatro puntos elegidos, se aproxima más por un ajuste por mínimos cuadrados los nuevos estudios sobre otras curvas implican ya solamente pequeñas variaciones en el valor de algunos de los puntos y por consiguiente en el de la población inicial

Son, en consecuencia cuatro las etapas de estas aproximaciones sucesivas, así

1º Elección de cuatro puntos, de equidistancia horizontal, que permitan el cálculo de p , con un valor aceptable como población inicial

2º Cálculo de una logística que pase por estos cuatro puntos, y su ajuste por mínimos cuadrados

3º Estudio de los puntos elegidos introduciendo las variaciones necesarias, a fin de ver las que por esta causa se producen en el valor de p y entre estos últimos aceptar el más conveniente que fija de antemano los puntos invariables para paso de la logística buscada como curva definitiva

4º Cálculo de la logística para estos cuatro puntos, y su ajuste por mínimos cuadrados

Procediendo en el orden indicado, vamos a desarrollar a continuación el programa expuesto

Primera etapa

Elección de cuatro puntos para paso de la curva

Cálculo del valor p

Tomamos como instrumento para la interpolación, la logística de la ecuación (63) en vez de recurrir a la parábola logarítmica (18) como estaba indicado, por encontrarse muy poca diferencia en los valores obtenidos en las dos curvas y para

aprovechar la gran aproximacion ya con seguida en la primera curva citada, a mas de la condicion especial que los puntos interpolados tendran para pertenecer a una logistica

Para puntos extremos tomamos

Punto 2—Abscisa 0 000

Punto 7—Abscisa 68 510

Los otros dos puntos intermedios para una logistica de cuatro puntos, tendran una equidistancia horizontal entre si, y con estos dos de 22 837 La serie de ellos sera

P to	Ab	O d d
Punto 2	$x_0 = 0\ 000$	$y_0 = 2000$
Punto 2B ₁	$x_1 = 22\ 837$	$y_1 = 3261$
Punto 4B ₁	$2x_1 = 45\ 673$	$y_2 = 5481$
Punto 7	$3x_1 = 68\ 510$	$y_3 = 8702$

Las ordenadas y_1 e y_2 fueron obtenidas como se advirtio, por la ecuacion (63)

La ordenada y_0 se ha dejado con su valor muy probable de 2000

Para el calculo de p en la expresion respectiva de $f(p)$, forma (67), encontramos la siguiente serie de valores

CUADRO NUMERO LII

CALCULOS PRELIMINARES	VALORES DE p			
	795	796	797	800
$(y_1 - p) (y_2 - p)$	11 55676	11 548525	11 541376	11 519941
$(y_0 - p) (y_3 - p)$	9 527935	9 518824	9 509715	9 482403
$(y_0 - p) (y_2 - p)$	0 928545	0 928329	0 928113	0 927463
$(y_1 - p)^2$				
$f(p)$ en millones	-4 550	-1 284	+2 004	+11 927

Estos valores en un grafico como el de Figura 13, dan aproximadamente

$$p = 796.5$$

Segunda etapa

Calculo de una logistica por los cuatro puntos anteriores

Su ajuste por minimos cuadrados

Con el valor en las expresiones (58) y (66) obtenemos

$$k = 18289.56$$

$$k = 18292.11$$

$$\text{Promedio } k = 18290.835$$

Las expresiones (55) y (56) dan

$$a_0 = 2.6531011$$

$$a_1 = \frac{1}{x_1} \text{Log} \frac{(k+p-y_1)(y_0-p)}{(k+p-y_0)(y_1-p)} = -0.0347390$$

$$a_1 = \frac{1}{x_1} \text{Log} \frac{(k+p-y_3)(y_2-p)}{(k+p-y_2)(y_3-p)} = -0.0347436$$

El promedio de los dos ultimos valores

$$a_1 = -0.0347413$$

De aqui la ecuacion

$$y = 796.5 + \frac{18290.835}{1 + e^{2.6531011 - 0.0347413x}} \quad (69)$$

Los calculos de comprobacion en el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO LIII

PUNTO	X	POBLACIÓN		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Ab solutas	En /
2	0 000	2000	2000	00	0 00
2B ₁	22 837	3261	3261	00	0 00
3	35 450	4303	4303	+ 20	+ 0 05
4	42 178	5070	5073	+ 30	+ 0 06
4B ₁	45 673	5481	5481	00	0 00
5	48 786	5867	5856	- 110	- 0 19
6	58 880	7246	7851	+ 6050	+ 8 35
7	68 510	8702	8702	00	0 00
OTROS AÑOS	Medios cuadraticos sin incluir el punto 6			4 375	0 077
Enero 1					
1770	- 100	836	807		
1810	- 60	955	1020		
1850	- 40	1112	1270		

La curva anterior debe ser ajustada por minimos cuadrados los datos preliminares figuran en el cuadro numero LIV

De dicho cuadro numero LIV y por intermedio de las ecuaciones normales del sistema (59), se obtienen los valores

$$C = + 0 070465$$

$$k = \frac{B}{C} = 18286 109$$

A + h = 0 0347327 usando para A el valor que figura en la ecuacion (69)

Entonces

$$h = -0 0000086$$

$$B = + 1288 530680$$

$$y = 796 5 + \frac{1288 53068}{0 070465 + e^{0 034 33}} \quad (70)$$

$$A = 0 0317413$$

CUADRO NUMERO LIV

P U N T O S	x	Ax	$\sum (x \cdot d)$	$\sum (x \cdot d)^2$	$\sum (x \cdot d) \cdot A^x$	$\sum (x \cdot d)^2 \cdot e^{Ax}$
2	0 000	1 000000	1203 5	1 448412 25	1203 500000	1 448412 2500
2 B ₁	22 837	0 452309	2464 5	6 073760 25	1114 715531	2 747216 4249
3	35 450	0 291780	3558 5	12 662922 25	1038 299130	3 694787 4541
4	42 178	0 231003	4276 5	18 288452 25	987 884330	4 224687 3351
4 B ₁	45 673	0 204591	4684 5	21 944540 25	958 406510	4 489655 4343
5	48 786	0 183619	5039 5	25 398540 25	929 0 0331	4 100378 3672
7	68 510	0 092539	7905 5	62 496930 25	731 567065	5 783403 4284
Sumas			29152 5	148 513557 75	6963 392927	27 088540 6890

P U N T O S	$\sum x(x \cdot d) \cdot e^{Ax}$	$\sum x(x \cdot d)^2 \cdot e^{Ax}$	$\sum x(x \cdot d) \cdot e^{2Ax}$	$\sum x(x \cdot d)^2 \cdot e^{2Ax}$
2	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000
2 B ₁	25456 7586	62 738181 5697	28 37704 1677	648 046557 7103
3	36812 8957	130 998689 3485	38 222797 5640	1355 189287 4898
4	41666 9853	178 188862 6355	41 162161 8272	1736 137651 5857
4 B ₁	43773 5019	205 056032 7506	41 952618 8066	1916 101958 9091
5	45323 1858	229 312658 5551	42 106161 0595	2054 191173 4732
7	50119 6595	396 220968 9678	36 665392 2503	2511 980778 0475
Sumas	243152 7869	1202 515393 8272	228 486675 6753	10221 646917 2958

Los calculos de comprobacion en el cuadro siguiente

CUADRO NUMERO LV

PUNTOS	x	POBLACION		CORRECCION	
		Calculada	Observada	Absolutas	En /
2	0 000	2000 2	2000	- 0 2	- 0 01
2B ₁	22 837	3260 9	3261	+ 0 1	0 00
3	55 455	1352 7	1353	+ 2 3	+ 0 05
4	12 178	5069 5	5073	+ 3 5	+ 0 07
4B ₁	15 673	5479 8	5481	+ 1 2	+ 0 02
5	18 786	5866 3	5856	- 10 3	- 0 17
6	58 880	7211 5	7251	+ 606 5	+ 8 37
7	68 510	8698 8	8702	+ 3 2	+ 0 01
O T R O P U N T O S	Medio cuadraticos sin incluir el punto 6			4 396	0 071
Enero 1					
1770	- 100	836	807		
1810	- 60	955	1026		
1830	- 10	1112	1170		

Tercera etapa

Variaciones posibles en los puntos de paso antes estudiados

Calculo final del valor de p

A continuacion vamos a observar las variaciones que pueden introducirse para cambiar el valor aceptado para el punto 2, ya que los dos puntos intermedios estan muy cercanos, o colocados entre valores censales de aceptacion convenida, y el ultimo es punto censal

En el ultimo ejemplo estudiado, los cuatro puntos escogidos de equidistancia horizontal, fueron

$$y_0 = 2000$$

$$y_1 = 3261$$

$$y_2 = 5481$$

$$y_3 = 8702$$

Si introducimos una serie de cambios en el valor de y_0 se obtiene para diversos valores de p , el cuadro numero LVI, y los correspondientes de $f(p)$ que permiten el calculo grafico de p para el sistema de los cuatro valores de las ordenadas escogidas. Estos van desde $p = 796.5$ hasta $p > 900$

CUADRO NUMERO LVI

Para $y_0 = 2000$

Valores de p	$(y_1 - p)(y_2 - p)(y_3 - p)$	R	$f(p)$	Valor deducido
$p = 796.5$	11 555676	9 57955	0 928545	- 1 550
$p = 796$	11 548525	9 548821	0 928529	- 1 281
$p = 797$	11 541176	9 509711	0 928113	+ 2 004
$p = 800$	11 519911	9 482100	0 927465	+ 11 927

Para $y_0 = 2001$

$p = 800$	11 519911	9 490302	0 928256	5 908
$p = 802$	11 505661	9 472100	0 927802	+ 2 691

CUADRO NUMERO LVI

(Conclusion)

Para $y_0 = 2002$

p 800	11 51 0911	9 198204	0 9_9009	— 19 716	p -807 9
p 805	11 48 1256	9 152 09	0 927923	3 200	
p 807	11 469990	9 131 25	0 927186	+ 5 150	

Para $v_0 = 2003$

p 800	11 519941	9 506106	0 929782	— 55 000	p 510 8
p 810	11 118621	9 41 5156	0 927606	— 2 429	
p 811	11 111 500	9 406072	0 927 87	+ 0 895	
p 815	11 427254	9 357 010	0 926917	+ 7 583	

Para $y_0 = 2010$

p 800	11 519941	9 561420	0 93 5192	— 145 256	p > 810
p 820	11 377501	9 379580	0 930873	— 79 990	
p 840	11 2 5861	9 195 540	0 926420	— 12 706	

Para $y_0 = 2040$

p 800	11 519941	9 759180	0 958379	— 601 736	p > 900
p 850	11 165341	9 313880	0 948041	— 119 255	
p 900	10 815741	8 891280	0 936557	— 9 652	

Una breve consideracion sobre el valor de la poblacion de 1770, que apenas alcanza a 807 000 habitantes en numeros redondos, indica que para y_0 solo es posible tomar como mas alto, el valor de

$y_0 = 2001$, en el cuadro numero LVI

En tal caso los cuatro puntos buscados serian

$x_0 = 0 000$	$y_0 = 2001$	Tomados del cuadro N LV
$x_1 = 22 837$	$y_1 = 3268$	
$2x_1 = 45 675$	$y_2 = 5480$	
$3x_1 = 68 510$	$y_3 = 8702$	

El valor de p para estos cuatro puntos ya habia sido calculado en el grafico de Figura 13, que dio

$$p = 798 3$$

Cuarta etapa

Calculo de la logistica sobre los puntos definitivos

Su ajuste por minimos cuadrados

Tomando finalmente, los puntos anteriores encontramos

Por las expresiones (58) y (66)

$$k = 18319 971$$

$$k = 18321 807$$

Promedio $k = 18320 89$

Las expresiones (55) y (56) dan

$$a_0 = 2 655572$$

$$a_1 = -0 0347307$$

$$a_1 = -0 0347313$$

Promedio $a_1 = -0 0347310$

$$v = 798 3 \mp \frac{18320 89}{1 + e^{6 - 2 0 034 31}} \quad (71)$$

Esta ultima ecuacion, ajustada por minimos cuadrados, requiere el calculo del cuadro numero LVII de donde se forma un sistema de ecuaciones normales, segun la expresion (59)

A=0 034751

CUADRO NUMERO LVII

PUNTOS	λ	$e^{-A\lambda}$	$\sum (\lambda d)$	$\sum (\lambda d)^2$	$\sum (\lambda d)e^{-A\lambda}$	$\sum (\lambda d) e^{-A\lambda}$
2	0 000	1 000000	1202 7	1 446487 29	1202 700000	1 446487 2900
2C ₁	22 837	0 452417	2462 7	6 064891 29	1114 167346	2 743859 9227
3	35 455	0 291887	3556 7	12 650114 89	1038 154493	3 692404 0849
4	42 178	0 231105	4274 7	18 273060 09	987 904514	4 222995 5521
4C ₁	45 673	0 204681	4681 7	21 918314 89	958 255038	4 456262 6100
5	48 786	0 183712	5057 7	25 580529 29	929 160182	4 699413 4545
7	68 510	0 092601	7903 7	62 468473 69	731 890524	5 784643 1322
Sumas			29139 9	148 401671 43	6992 232127	27 076066 0464

PUNTOS	$\sum \lambda(\lambda-d) e^{-A\lambda}$	$\sum \lambda(\lambda d) e^{-A\lambda}$	$\sum \lambda(\lambda-d)e^{-2A\lambda}$	$\sum \lambda(\lambda d)e^{-2A\lambda}$
2	0 0000	0 0000	0 0000	0 0000
2C ₁	25444 2397	62 061529 1092	28 349141 0154	647 409333 4737
3	36807 7675	130 914186 6673	38 212149 2133	1354 811750 2406
4	41667 8579	178 117506 6711	41 163846 3859	1736 208713 0374
4C ₁	43766 3824	204 901072 4821	41 939356 4204	1915 496225 7007
5	45330 0096	229 265 84 4962	42 118839 0597	2054 609682 3812
7	50141 8198	396 305901 1533	36 698322 7570	2514 202092 2876
Sumas	243158 0559	1202 165780 5792	228 481654 8517	10222 937797 1912

Este sistema da por soluciones

$$\begin{aligned} h &= -0 0000001 \\ B &= 1287 518 \\ C &= 0 07036368 \\ A + h &= 0 0347311 \\ k = \frac{B}{C} &= 18298 084 \end{aligned}$$

Y la ecuacion

$$y = 798 3 + \frac{1287 518}{0 0703637 + e^{0 0347311}} \quad (72)$$

El cuadro final para calculos de comprobacion de la ecuacion (72) es

CUADRO NUMERO LVIII

PUNTOS	λ	POBLACION		CORRECCIONES	
		Calculada	Observada	Absolutas	En /
2	0 000	2001 1	2001	- 0 1	0 00
2C ₁	22 837	3261 1	3261	- 0 1	0 00
3	35 455	4352 2	4352	+ 2 2	+ 0 06
4	42 178	5069 1	5073	+ 3 9	+ 0 07
4C ₁	45 673	5479 3	5480	+ 0 7	+ 0 01
5	48 786	5865 8	5856	- 9 8	- 0 17
6	58 880	7244 0	7851	+ 607 0	+ 8 38
7	68 510	8096 8	8702	+ 3 2	+ 0 03
OTROS AÑOS	Medios cuadraticos sin incluir el punto 6			4 280	0 074
Enero 1				4 396 (1)	0 071 (1)
1770	- 100	838	807	(1) Segun curva (70) Poblacion calculada por curva (18)	
1810	- 80	957	1020		
1830	- 40	1114	1270		
Julio 1					
1940	+ 70 50	9010		9050	
1950	+ 80 50	10572		10791	
1960	+ 90 50	12141		12712	

Dados los resultados del cuadro anterior, esta ultima ecuacion puede aceptarse como la correspondiente a la curva logistica mas aproximada para la interpretacion racional del crecimiento de la poblacion colombiana

CONSIDERACIONES FINALES

La ecuacion (72) es, como acabamos de decirlo, la forma final aceptada para las interpolaciones en la poblacion censal colombiana. Un calculo detallado año por año, a contar de 1905, se presenta en el cuadro numero LIX para su uso en el calculo de coeficientes demograficos. Al mismo tiempo se repiten los calculos hechos antes, a base de la parabola logaritmica, ecuacion (18) para ver su correspondencia con los anteriores.

La 5ª columna, diferencias entre los valores del calculo obtenido con las ecuaciones (18) y (72) respectivamente, presenta valores de poca monta entre 1905 y 1918. De allí en adelante crecen continuamente hasta 1929, en donde llegan a un

maximo, debido al error de la poblacion de 1928, que no permitio determinar un punto fijo para paso de las curvas representativas, luego vuelve un decrecimiento en los valores, hasta llegar a cero entre 1937 y 1938, ultimo año censal registrado.

Se han hecho calculos tambien para la poblacion extracensal desde 1938 hasta 1950, de año en año, y desde 1950 hasta el año 2000 variando por decenios.

Despues del año de 1938 las diferencias entre las poblaciones calculadas por las dos formas de curvas expuestas, son ahora continuamente crecientes, pues la logistica tiene su punto de inflexion el 1º de junio de 1946, y mientras las ratas de poblacion empiezan de allí en adelante a decrecer, las que corresponden a la parabola logaritmica, en cambio, siguen creciendo, la rama curvilinea representativa del desarrollo de la poblacion, en la curva logistica, es ahora concava con respecto al eje horizontal de las abscisas, mientras que en la parabola logaritmica es convexa con respecto a dicho mismo eje.

CUADRO NUMERO LIV

AÑOS (Julio 1)	Abseis para la logística con origen en 1870 enero 1	POBLACION CALCULADA PARA EL JULIO 1		Diferencias entre las dos últimas co- lumnas	POBLACION ESTIMADA	
		Por la logística de ecuación numero (72)	Por la parábola logarítmica de ecuación nu- mero (18)		En las fechas mencionadas	Reducida a julio 1 por medio de la ecuación (12)
1870	+ 05	2 020840	2 166810	146000	Censo de 1905 en junio 15 4 355477	4 350010
1905	355	4 357030	4 360110	3410		
1906	365	4 457720	4 461290	3670	Censo de 1912 en marzo 5 5 072604	5 10335
1907	375	4 560350	4 564080	3730		
1908	385	4 665180	4 668790	3710		
1909	395	4 772200	4 775410	3240		
1910	405	4 881300	4 884010	2710	Censo de 1918 en octubre 14 5 855117	5 815000
1911	415	4 992530	4 994710	1930		
1912	425	5 105860	5 106940	1080	Censo de 1928 en Abril 17 7 701816	7 701510
1913	355	5 221290	5 221260	—		
1914	415	5 338820	5 337540	—		
1915	435	5 458420	5 455720	—		
1916	465	5 580080	5 577810	—		
1917	475	5 703770	5 697820	—		
1918	485	5 829460	5 821740	—		
1919	495	5 957140	5 947570	—		
1920	505	6 086770	6 075310	—	Censo de 1938 en julio 5 8 701816	8 700230
1921	515	6 218320	6 204960	—		
1922	525	6 351720	6 336520	—		
1923	535	6 486970	6 469940	—		
1924	545	6 624010	6 605300	—		
1925	555	6 762780	6 742600	—		
1926	565	6 903240	6 881800	—		
1927	575	7 045340	7 022880	—		
1928	585	7 189010	7 165860	—		
1929	595	7 334200	7 310740	—	Censo de 1938 en julio 5 8 701816	8 700230
1930	605	7 480830	7 457520	—		
1931	615	7 628840	7 602210	—		
1932	625	7 778150	7 756790	—		
1933	635	7 928700	7 909260	—		
1934	645	8 080410	8 063640	—		
1935	655	8 233200	8 219910	—		
1936	665	8 387000	8 378080	—		
1937	675	8 541690	8 538140	—	Censo de 1940 en octubre 1 9 029700	9 029700
1938	685	8 697220	8 700100	—		
1939	695	8 853490	8 863950	—	Censo de 1940 en octubre 1 9 029700	9 029700
1940	705	9 010410	9 029700	—		
1941	715	9 167860	9 197340	—	Censo de 1940 en octubre 1 9 029700	9 029700
1942	725	9 325800	9 366870	—		
1943	735	9 484130	9 538300	—	Censo de 1940 en octubre 1 9 029700	9 029700
1944	745	9 642720	9 711520	—		
1945	755	9 801480	9 886830	—	Censo de 1940 en octubre 1 9 029700	9 029700
1946	765	9 960350	10 063940	—		
1947	775	10 119240	10 242930	—	Censo de 1940 en octubre 1 9 029700	9 029700
1948	785	10 277990	10 423820	—		
1949	795	10 436540	10 606590	—	Censo de 1940 en octubre 1 9 029700	9 029700
1950	805	10 594790	10 791260	—		
1960	905	12 141100	12 741840	—	Censo de 1940 en octubre 1 9 029700	9 029700
1970	1005	13 564960	14 881160	—		
1980	1105	14 807540	17 209050	—	Censo de 1940 en octubre 1 9 029700	9 029700
1990	1205	15 842140	19 725360	—		
2000	1305	16 670380	22 429970	—		

Antes de terminar este trabajo volvemos a recordar que todo se hizo un estudio metodico de la logistica a cuatro constantes de forma simetrica, con respecto a la vertical o a la horizontal del punto de inflexion como este decrecimiento de la rata de poblacion ocurrira muy pronto desde junio de 1946 hasta donde lo permita la exactitud de estos calculos podemos concluir asi

1° Que el estudio emprendido puede interpretarse con mucha probabilidad de acierto empleando la logistica de cuatro constantes porque aunque su forma de decrecimiento es simetrica a la del crecimiento estando tan cercano a 1940 el punto de inflexion, los datos de extrapolacion que pudieran usarse en el proximo decenio lo comprenden y en tan corto espacio de tiempo no tiene marcada influencia esta circunstancia

2° Para calculos en otros decenios por venir si es aconsejable la forma asimetrica de mas de cuatro constantes, como la representada en la ecuacion (32)

Es claro ademas que despues de cada decenio se debe corregir la forma de la ecuacion (72) con el nuevo dato censal obtenido y la correspondencia entre los valores calculados con los observados, indicara cuando se debe intentar el uso de una logistica a mas de cuatro constantes

3° La ecuacion (72) permite ademas conceputar sobre los topicos tratados al final del estudio de otras curvas, a saber

- 1 El error de la poblacion de 1928
- 2 La rata del crecimiento anual de la poblacion
- 3 El punto de inflexion
- 4 Los datos extrapolado la futura poblacion de 1948, y el limite maximo a que podria alcanzar la poblacion colombiana

Trataremos estos temas finales a continuacion y en su mismo orden de exposicion

El error de la poblacion de 1928

En todos los calculos hechos se ha tratado de relieves el numero calculado que muestra esta poblacion y su gran diferencia con el dato de observacion Refirieronos a los ultimos calculos hechos, obtenemos del cuadro numero LIX, los siguientes valores

DATOS DE POBLACION REDUCIDO A JULIO 1 DE 1928	S	I	S	I
		(18)		(1)
De la poblacion observada	7 791 420		7 791 510	
Poblacion calculada	7 165 860		7 159 010	
Diferencias			625 500	602 500

De modo que en definitiva podemos expresar

Que el error de la poblacion censada en 1928 es en numeros redondos de 600 000 habitantes

La rata del crecimiento anual

Como en los casos anteriores, dos valores sucesivos de la ordenada para la diferencia de un año darian

$$v_1 = p + \frac{B}{C + e^{A_1 - 1}} = p + \frac{B}{C + e^{A_1}} \quad (73)$$

Cambiando $A + h$ por A_1

$$y = p + \frac{B}{C + e^{A_1 - 1}} \quad \text{y si } e^{A_1} = Z,$$

$$D_1 = y - v_1 = \frac{B(e^{A_1} - 1)Z}{C^2 e^{A_1} + Z(Ce^A + C + Z)}$$

Reemplazando los valores conocidos para las constantes de la ecuacion (72), tenemos

$$D_1 = \frac{45 50886Z}{0 005126 + Z(0 143214 + Z)} \quad (74)$$

Esta expresion representa alguna complicacion de calculo que puede obviarse facilmente con la primera derivada de la poblacion con respecto al tiempo

En efecto, la rata instantanea del crecimiento corresponde a la primera derivada

$$\text{Si en (73) cambiamos } \frac{B}{C} = k, \text{ obtenemos}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A_1}{k} (k + p - y)(y - p) \quad (75)$$

Expresion que facilmente resulta de la ecuacion (24), cambiando y por $y - p$ e por A_1

Con las constantes de la ecuacion (72)

$$\frac{A_1}{k} = 0 00000189807$$

Si hacemos $\partial x = 1$ el valor de ∂y , se aproxima al del crecimiento anual, asi por ejemplo

Poblacion de 1906 - Abs $x=36.5$ en cuadro LIX 4 457620
 Poblacion de 1905 - Abs $x=35.5$ en cuadro LIX 4 357030
 Crecimiento en un año 100590

O en terminos de ecuacion (72)

Crecimiento=100.59

Ahora, para $y=4357.03$, y las constantes de ecuacion (72) obtenemos con $\delta x=1$ en (75)

$\delta y=99.56$ numero que apenas se aproxima al anterior valor de 100.59

Pero si tomamos el valor de δy en la mitad de la diferencia entre las abscisas de los años 1905 y 1906, es decir, en $x=36$, encontramos un resultado mas aproximado

Para $x=36$ y $y=4407.06$ en la ecuacion (72) Con este ultimo valor en (75), con $\delta x=1$, $\delta y=100.62$, o simplemente

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 100.62$$

De manera que la rata instantanea del crecimiento de poblacion tomada en la mitad del arco de curva que limitan dos puntos extremos, representa con gran aproximacion la rata del crecimiento lineal por unidad de tiempo

Del cuadro LIX, por ejemplo, tomamos estos datos

Poblacion de 1948	10277.99 en miles
Poblacion de 1938	8697.22 en miles
Diferencia	1580.77

Crecimiento lineal por año 158.08

Para 1938, $x=68.5$

Para 1948, $x=78.5$

Un punto medio entre los dos tendria por abscisa $68.5+5=73.5$

Para $x=73.5$ $y=9484.13$

Este valor en (75), nos da

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 158.47 \text{ para los diez años, } 1584.70$$

Valor muy proximamente igual al anotado por diferencias directas en la poblacion

El punto de inflexion

De la expresion (75) se deduce

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{A_1}{k} \right)^2 (k+2p-2y)(k+p-y)(y-p) \quad (76)$$

El mismo resultado se obtiene cambiando en la ecuacion (25) y por $y-p$ e ϵ por A_1

$$\text{De la condicion } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

resultan

$$\begin{aligned} y - p &= 0 \\ k + p - y &= 0 \\ k + 2p - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Las dos primeras expresiones representan las ecuaciones de las asintotas

$$\begin{aligned} y &= p = 798.3 \\ y &= k + p = 19096.4 \end{aligned} \quad (77)$$

La tercera da

$$y = p + \frac{k}{2} \quad (78)$$

que es la ordenada del punto de inflexion

En la ecuacion (73), cambiando

$$\frac{B}{C} = k$$

$$\frac{1}{C} = m$$

$$1 + me^{-A_1} = \frac{k}{y-p}$$

$$x = - \frac{2302585}{A_1} \text{Log} \frac{k+p-y}{m(y-p)} \quad (\text{Logaritmos naturales})$$

Reemplazando el valor de (78)

$$x = - \frac{2302585}{A_1} \text{Log} C = 76.418$$

Si observamos la abscisa de julio 1° de 1946 en el cuadro LIX, que es 76.500, vemos que el valor anterior de 76.418 corresponde con gran aproximacion al 1° de junio de 1946, y en consecuencia, puede concluirse asi

Que la rata del aumento en la poblacion colombiana, que en el ultimo decenio ha sido de tan notoria significacion, al decir de americanos y europeos, se aproxima rapidamente a su culminacion, dentro de cuatro años. De alli en adelante deberia iniciarse primero un periodo de estabilidad y a continuacion otro de descenso, muy lento al principio, pero de acentuacion progresiva, para poner en accion las fuerzas de la naturaleza que gobiernan el fenomeno de la poblacion

Los datos extrapolados, la futura poblacion de 1948 y el limite maximo de 19,000000 a que llegaria nuestra poblacion en el año de 2097

La logistica numero (72) tiene la conformacion especial para permitir una extrapolacion a partir de 1938 que pueda avan

zar uno o dos decenios, por lo menos En algunos ejemplos estudiados para la poblacion de otros paises, se ha llegado a prever la futura poblacion hasta para cinco decenios con una aproximacion del 1 %

Tomando los datos ya calculados en el cuadro LIX, obtenemos

Cuadro final que muestra el crecimiento de la poblacion futura de Colombia, de acuerdo con las teorias estudiadas

CUADRO NUMERO LX

AÑOS	POBLACION CALCULADA PARA EL 1 DE JULIO DE CADA AÑO POR LA ECUACIÓN		
	Abscisas con origen en 1870	$y = 7983 + \frac{1287 \cdot 18}{0.0703637 + e^{0.034311}}$	
Julio 1	Abscisas y numero de habitantes		OBSERVACIONES
1938	680	8 697 220	Censo el 1 de julio reducido al dia 1
1939	690	8 803 490	Año en que se termina este estudio
1940	700	9 010 410	
1941	710	9 167 860	Junio 1º Punto de inflexion
1942	720	9 320 800	
1943	730	9 484 130	
1944	740	9 642 720	
1945	750	9 801 480	
(1946)	76 418	9 947 330	
1946	760	9 960 360	
1947	770	10 119 240	
1948	780	10 277 900	
1949	790	10 436 540	
1950	800	10 594 790	Probable poblacion para el censo de este año
1960	900	12 141 100	
1970	1000	13 564 960	
1980	1100	14 807 510	
1990	1200	15 842 140	
2000	1300	16 670 380	
2012	1420	17 421 540	
2097	2270	19 000 000	
			Se duplica la poblacion de 1938 Se aproxima la poblacion a su limite maximo

Todas esas poblaciones han sido calculadas para julio 1º, a excepcion de la del año (1946), que figura entre parentesis, y corresponde al momento en que la rata de la poblacion empieza a decrecer, asi que, segun las teorias estudiadas, debemos esperar el cumplimiento de los siguientes hechos

Primero

La futura poblacion de 1948, necesaria para el planeamiento de la organizacion censal de dicho año, en cumplimiento de la Ley colombiana que ordena esas inversiones, debe considerarse con un valor muy aproximado al de 10,300000 habitantes

Segundo

Para junio de 1946 esta fijado el punto de inflexion de la logistica numero (72), lo que significa que nuestra poblacion debe seguir aumentando con una rata lentamente creciente por unos 6 años mas, solamente de alli en adelante se deberia iniciar un decrecimiento en esa rata que hoy se aproxima a 157,500 habitantes por año La serie de esos valores en el decenio de 1940 a 1950, es

Para 1941	157,450 habitantes
1942	157,940
1943	158,330
1944	158,590
1945	158 760

Para 1946	158,880 habitantes
1947	158,880
1948	158,750
1949	158,550
1950	158,250

Tercero

Entre 1938 y 1948, mientras se levanta el censo correspondiente a este ultimo año, deberan usarse los valores anotados en el cuadro numero LX para la obtencion de coeficientes demograficos

Cuarto

De acuerdo con el cuadro ya citado numero LX, la poblacion de 1938 se duplicara dentro de 74 años, es decir el año de 2012

Quinto

Finalmente, siguiendo al pie de la letra el significado de las teorías expuestas, la expresión (77) indica que la población colombiana, de acuerdo con la tendencia del crecimiento que se ha podido obligar dentro de las modalidades de la ecuación (72), solo podría alcanzar a la cifra que en números redondos hacemos figurar de 19,000,000 de habitantes. En el cuadro numero LX esta población corresponde al año del Señor de 2097. De allí en adelante la población debería seguir prácticamente estacionaria. Naturalmente se trata de una conclusión netamente teórica, ya que del territorio habitable colombiano solo hay poblada menos de la cuarta parte, y el movimiento migratorio del país, hoy arroja un saldo favorable a la población menor del $\frac{1}{2}$ por mil.

Todas estas conclusiones tienen solamente un valor teórico pero en veces han servido para predicciones hasta de medio siglo, que se han cumplido con una aproximación de error apenas del 1%. Para fijar de manera más precisa la curva representativa de la tendencia estadística investigada, es necesario que decenio por decenio se continúe haciendo el ajuste de los datos por los procedimientos que dejamos establecidos, y cuando ya quede definido el punto de inflexión, por la observación censal se trataría de introducir al estudio la logística a más de cuatro constantes,

que probablemente aumentaría la precisión de los datos calculados.

Al finalizar este estudio, recomendamos con interés a los demógrafos del país su continuación al través de las investigaciones censales para la conservación sistemática de estas disciplinas matemáticas que presentan un buen aporte a la cultura general y muy especialmente a la naciente demografía colombiana.

CAPITULO VI

API NDIC L

RESUMEN DE LOS DATOS CENSALES DE 1938 CON LA DISTRIBUCIÓN DE DEPARTAMENTOS, INTENDENCIAS, COMISARIAS Y MUNICIPIOS SEXOS, ESTADO CIVIL Y OTRAS ATRIBUCIONES

El Censo de 1938 arrojó una población de 8 701 816 habitantes, distribuidos por sexo, así:

Hombres	4 310 137	100
Mujeres	4 386 881	102
	8 697 018	
Sin clasificar	1775	- Tribu indígenas
Total	8 701 816	

La República de Colombia está dividida políticamente para su administración, en Departamentos, Intendencias y Comisarias, cada una de estas extensiones en Municipios, y los Municipios en Corregimientos.

El Censo de 1938 fue ordenado por Decreto ejecutivo numero 987 de 1937 (mayo 17) para cumplir un mandato de la Ley 67 de 1917, que ordena su levantamiento cada diez años, a partir del año de 1918.

Corresponde la dirección suprema de esta labor a la Contraloría General de la República, bajo cuyo gobierno figura la Dirección Nacional de Estadística. Dado el esmero y la organización que se planearon para su ejecución, se considera que este Censo es el más exacto que hasta hoy se haya hecho en Colombia. Su dirección inmediata estuvo a cargo del Ingeniero Antonio Suarez Rivadeneira.

La recolección de los datos primarios se hizo el día cinco de julio.

A continuación se transcriben los resúmenes generales de esta investigación.

RESUMEN DE LA POBLACION DE COLOMBIA POR DEPARTAMENTOS, INTENDENCIAS Y COMISARIAS, SEGUN CENSO DE 1938

En los cuadros que siguen se presentan dos clasificaciones diferentes de la poblacion. En la primera, ademäs de la divisi6n por sexos, se separan los habitantes que un vivan en la poblacion capital o cabecera de cada municipio o segun que residan en los campos u otras localidades pobladas del mismo municipio. En la segunda, se anota la poblacion urbana y rural perteneciente a la poblacion urbana los centros de poblacionlomerada que tengan mäs de 7500 habitantes y la rural los de menos de 1500 habitantes. En ambos casos se prescinde como es evidente de que el centro poblado que se clasifica tiene o no como cabecera o ciudad capital del municipio.

DEPARTAMENTOS INTENDENCIAS COMISARIAS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SEGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL		
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Urbana	Rural	Gran total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total			

DEPARTAMENTOS

Antioquia	151 018	200 661	357 139	419 000	411 788	830 848	1 188 591	329 102	858 885	1 188 587
Atlántico	111 315	119 235	230 610	20 251	11 245	37 799	268 402	237 144	30 665	238 409
Bolívar	130 285	153 561	283 849	248 717	232 558	481 345	165 104	320 913	414 281	155 194
Bolívar	42 191	51 809	97 000	309 287	31 081	610 368	737 356	47 549	689 819	737 368
Caldas	111 314	129 155	240 529	283 176	245 663	529 439	769 968	246 991	522 981	769 968
Cauca	24 674	28 502	53 176	150 148	152 416	302 864	356 010	38 725	312 315	356 040
Cundinamarca	209 412	262 340	471 812	360 721	342 068	702 795	1 174 607	413 689	760 918	1 174 607
Huila	28 048	35 150	6 798	71 906	71 972	152 818	216 576	53 546	163 130	216 616
Magdalena	59 114	68 290	128 004	113 551	100 746	214 318	342 322	149 331	192 991	342 322
Nariño	48 204	56 810	105 014	180 046	180 808	360 854	465 868	77 114	388 754	465 868
Norte de Santander ()	44 726	55 331	100 357	121 369	118 455	245 824	316 181	88 035	258 146	316 181
Santander	63 335	81 535	144 870	242 291	228 519	470 840	615 710	118 171	497 539	615 710
Tolima	56 129	68 455	125 194	221 849	200 753	422 602	517 796	119 351	428 445	547 196
Valle del Cauca	118 251	132 264	250 525	191 065	165 139	356 205	613 230	268 788	344 442	613 230
Totales	1 205 966	1 447 011	2 652 977	2 952 428	2 802 551	5 754 979	8 407 956	2 509 648	5 898 308	8 407 956

INTENDENCIAS

Antioquia	1 035	519	1 674	2 834	1 906	4 740	6 411	1 674	1 740	6 414
Chocó	1 032	1 933	14 965	48 165	47 486	96 251	111 215	10 063	101 153	111 216
Meta	5 536	5 422	10 958	23 361	17 355	40 716	51 614	8 333	43 341	51 614
San Andrés y Providencia	613	114	1 327	2 522	2 619	5 201	6 528	—	6 528	6 528
Totales	14 276	14 648	28 924	77 482	69 426	146 908	175 832	20 070	155 762	175 832

COMISARIAS

Aracataca	1 606	1 180	3 385	4 013	3 697	11 700	11 256	1 871	9 285	11 156
Ciénega	2 045	2 119	4 164	3 583	7 167	16 750	20 914	1 161	16 750	20 914
Cuaceta	196	144	340	27 561	25 503	53 069	53 402	—	53 409	53 409
Futimayo	1 256	1 074	2 330	1 293	6 065	13 258	15 658	—	15 688	15 688
Naup	200	112	312	3 992	3 463	7 455	7 761	—	7 767	7 767
Nielada	249	143	392	4 557	4 145	8 702	9 091	—	9 091	9 091
Totales	5 552	5 372	10 924	57 059	50 045	107 104	118 028	6 035	111 933	118 028

Total general 1 225 794 1 467 031 2 692 825 3 086 969 2 922 022 6 008 991 8 701 816 2 535 753 6 166 063 8 701 816

(1) En la poblacion rural de Norte de Santander se dan incluidos 4775 indios que han sido repartidos en relacion al sexo de acuerdo con la proporcion de hombres y mujeres en la parte otras localidades de los municipios de Cúcuta, Toledo y los cuales pertenecen por no haber sido posible obtener este dato con exactitud.

POBLACION DE COLOMBIA, POR MUNICIPIOS, SEGUN CENSO DE 1938

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SEGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL			
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural	Gran total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				
DEPARTAMENTO DE ANTIOQUIA										
Medellín	63 512	80 440	143 952	11 785	12 529	24 314	168 266	113 952	21 312	168 266
Amaga	1 049	1 257	2 306	4 252	4 175	8 727	11 033	2 306	8 727	11 033
Abejorral	1 869	2 796	4 665	11 538	11 365	22 903	27 568	4 665	22 903	27 568
Abriaquí	190	216	406	1 222	1 091	2 313	2 719	—	2 719	2 719
Alejandro	340	432	772	951	967	1 913	2 685	—	2 685	2 685
Amalfi	1 284	1 948	3 232	4 593	3 778	8 371	11 603	3 232	8 371	11 603
Andes	2 591	3 400	5 991	10 847	10 701	21 543	27 534	5 991	21 543	27 534
Angelópolis	406	496	902	2 043	1 991	4 034	4 936	—	4 936	4 936
Angostura	649	1 055	1 704	3 948	4 103	8 051	9 755	1 704	8 051	9 755
Anorí	706	1 120	1 826	3 573	2 998	6 521	8 347	1 826	6 521	8 347
Antioquia	1 614	2 196	3 810	4 576	4 639	9 215	13 025	3 810	9 215	13 025
Anzá	240	278	518	2 236	2 266	4 502	5 070	—	5 070	5 070
Armenia	396	455	852	3 037	3 034	6 066	6 918	—	6 918	6 918
Barbosa	788	932	1 740	5 467	5 601	11 063	12 803	1 740	11 063	12 803
Belmira	321	429	750	2 040	2 173	4 213	4 963	—	4 963	4 963
Bello	3 505	4 675	8 180	2 774	2 469	5 243	13 423	8 180	5 243	13 423
Betania	553	639	1 192	4 179	4 473	8 652	9 844	—	9 844	9 844
Betulia	598	712	1 310	4 486	4 737	9 218	10 578	—	10 578	10 578
Bolívar	1 857	2 356	4 213	6 160	5 913	12 073	16 286	4 213	12 073	16 286
Buriticá	380	473	853	2 632	2 647	5 274	6 127	—	6 127	6 127
Caceres	372	293	665	1 145	781	1 926	2 591	—	2 591	2 591
Caicedo	191	213	404	1 883	1 885	3 768	4 172	—	4 172	4 172
Caldas	282	1 565	2 847	2 865	2 914	5 779	8 676	2 847	5 779	8 626
Campamento	934	1 064	1 998	2 579	2 793	4 872	6 870	1 998	4 872	6 870
Canasgordas	858	1 109	1 967	6 186	6 347	12 528	14 495	1 967	12 528	14 495
Caramanta	2 053	2 165	4 218	2 287	2 166	4 448	8 665	4 218	4 448	8 666
Carmen	969	1 168	2 137	5 877	6 137	12 014	14 151	2 137	12 014	14 151
Carolina	848	1 201	2 049	2 661	2 895	5 556	7 605	2 049	5 556	7 605
Cisneros	375	3 098	5 473	1 310	1 356	2 666	8 089	5 423	2 666	8 089
Cocorna	486	525	1 011	7 815	6 996	14 811	15 827	—	15 827	15 827
Concepción	260	365	625	1 654	1 954	3 608	4 236	—	4 233	4 233
Concordia	2 211	2 516	4 827	4 505	4 141	8 946	13 773	4 827	8 946	13 773
Copacabana	759	1 004	1 763	2 773	3 103	5 876	7 539	1 763	5 876	7 639
Chigorodó	218	207	425	24	25	49	474	—	474	474
Chiribá	877	950	1 827	7 371	6 370	13 691	15 518	1 827	13 691	15 518
Donmatías	629	952	1 581	2 140	2 023	4 163	5 744	1 581	4 163	5 744
Envigado	394	330	724	5 338	5 490	10 828	11 482	—	11 482	11 482
Entrerrios	415	566	981	1 452	1 410	2 862	3 843	—	3 843	3 843
Envigado	1 721	2 532	4 253	4 651	5 118	9 769	14 022	4 253	9 769	14 022
Frederona	1 731	2 122	3 853	11 109	11 187	22 296	25 149	3 853	22 296	26 149
Frontino (1)	916	1 229	2 145	7 276	7 122	14 398	16 543	3 730	12 813	16 543
Guadalupe	258	287	545	1 121	1 155	2 276	2 821	—	2 821	2 821
Guaradota	825	123	2 038	3 237	3 559	6 796	8 134	2 038	5 196	8 834
Guicmez Plata	959	1 346	2 305	2 619	2 460	5 079	7 384	2 305	5 079	7 384
Guirapada	630	806	1 436	4 424	4 154	8 878	10 314	—	10 314	10 314
Guarne	337	476	813	3 433	3 765	7 198	8 011	—	8 011	8 011
Guatapé	1 191	1 236	2 427	708	769	1 527	3 954	2 427	1 527	3 954
Hatibonía	795	911	1 706	2 131	2 02	4 393	6 099	1 706	4 393	6 099
Itagüí	658	797	1 455	2 455	2 748	5 204	6 659	—	6 659	6 659
Ituango	1 168	1 685	2 854	8 984	8 728	17 712	20 566	2 854	17 712	20 566
Jardín	1 034	1 419	2 453	3 883	3 907	7 790	10 243	2 453	7 790	10 243
Jerico	2 079	2 843	4 922	6 745	6 438	13 183	18 105	4 922	13 183	18 105
La Ceja	2 063	2 738	4 801	2 551	2 763	5 314	10 115	4 801	5 314	10 115
La Estrella	288	408	696	2 313	2 744	5 057	5 753	—	5 753	5 753
La Unión	399	446	845	1 682	1 777	3 459	4 304	—	4 304	4 304
Líbora	410	522	932	3 669	4 179	7 848	8 780	—	8 780	8 780
Marinilla	1 507	2 081	3 588	5 229	5 087	10 316	13 907	3 591	10 316	13 907
Montebello	398	506	904	3 434	3 549	6 983	7 887	—	7 887	7 887
Murindo	120	116	236	566	523	1 089	1 375	—	1 325	1 325
Narino	551	794	1 345	3 878	3 889	7 717	9 062	—	9 062	9 062
Margento	349	266	615	2 197	2 068	4 865	5 480	—	5 480	5 480
Olaya	125	120	245	1 214	1 102	2 316	2 561	—	2 561	2 561
Pavarandocito	146	147	293	154	126	280	573	—	573	573
Penol	589	867	1 456	3 510	3 977	7 487	8 943	—	8 943	8 943
Peque	686	749	1 435	2 027	2 105	4 132	5 567	—	5 567	5 567
Puerto Berrio (2)	3 252	2 235	5 487	7 280	5 297	12 572	18 059	7 997	10 062	18 059

(Continúa)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXO SEGUN HABITACION EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL		
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbano	Rural
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total			

DEPARTAMENTO DE ANTIOQUIA - (Conclusion)

Pueblorrico	760	1036	1796	4271	4367	8635	10431	1796	8635	10431
Remedios	557	610	1167	3576	2242	5813	6975	—	6975	6975
Retiro	642	948	1590	2311	2196	4512	6102	1590	4512	6102
Rionegro	1586	2097	3683	669	7476	14167	17845	3678	14167	17845
Sabanalarga	350	404	754	195	2087	4046	4810	—	4810	4810
Salgar	906	1186	2092	7129	6878	14007	16099	2092	14007	16099
San Andres	393	502	895	3421	3675	7016	7941	—	7941	7941
San Carlos	442	593	1035	3701	3519	7220	8255	—	8255	8255
San Jeronimo	765	929	1694	2868	2986	5854	6945	1694	5854	7548
San Luis	228	268	496	1593	1273	2866	3362	—	3362	3362
San Pedro	664	706	1370	2365	2490	4855	6225	—	6225	6225
San Rafael	512	613	1125	2991	2698	5689	6814	—	6814	6814
San Roque (3)	968	1405	2373	7990	6685	14675	17048	4819	12229	17018
Santa Barbara	1333	1787	3120	7050	7182	14232	17352	3120	14232	17352
Santa Rosa	1705	2428	4133	8241	8853	17094	21227	4133	17094	21227
Santo Domingo	919	1344	2263	4836	5124	9960	12223	2263	9960	12223
Santuario	1037	1265	2302	4229	4503	8732	11035	2302	8732	11035
San Vicente	333	443	776	471	5063	9834	10610	—	10610	10610
Segovia	1133	840	1973	2979	1993	4972	6945	1973	4972	6945
Sonson	3496	5488	8984	12271	12359	24630	33614	8984	24630	33614
Sopetrin	1260	1606	2866	4539	4818	9357	12223	2866	9357	12223
Timesis	1690	2260	3950	6870	7078	13948	17898	3950	13948	17898
Tarso	370	412	782	3421	3055	6476	7288	—	7288	7288
Titiribi	1255	1670	2925	5588	5920	11508	14433	2925	11508	14433
Toledo	337	400	737	1942	2194	4136	4873	—	4873	4873
Turbo	507	590	1097	4953	4439	9392	10489	—	10489	10489
Urrao	1578	2129	3707	7785	7661	15446	19156	3707	15449	19156
Valdivia (4)	426	551	977	4316	3754	8070	9047	1546	7401	9047
Valparaiso	867	1101	1968	2492	2492	5103	7071	1968	5103	7071
Venecia	908	1082	1990	4607	4535	9142	11132	1990	9142	11132
Yarumal (5)	3407	5266	8673	7920	7879	15799	21497	10388	14154	21497
Yolombo	1101	1580	2681	11342	9865	21207	23888	2681	21207	23888
Zaragoza	594	458	1052	2696	1192	3888	4940	—	4940	4940
Totales	157 078	200 661	357 739	419 060	411 788	830 848	1 188 587	329 702	858 885	1 188 587

DEPARTAMENTO DEL ATLANTICO

Barranquilla	71 535	78 860	150 395	1053	894	1 953	152 348	150 395	1 953	152 348
Baranoa	3345	3554	6899	1021	875	1896	8795	6899	1896	8795
Campo de la Cruz	2 668	2 690	5 358	173	127	300	5 758	5 358	300	5 758
Candelaria	1 123	1 095	2 218	955	845	1 800	4 018	2 218	1 800	4 018
Calapa	1 511	1 471	2 982	340	261	601	3 583	2 982	601	3 583
Juan de Acosta	961	880	1841	762	668	1430	3271	1841	1430	3271
Malambo	1 544	1 442	2 986	1 013	621	1 634	4 620	2 986	1 634	4 620
Manati	2 621	2 805	5 426	109	38	147	5 573	5 426	147	5 573
Pa mar de Varela	1 446	1 657	3 103	267	195	462	3 865	3 103	462	3 865
Piojo	829	792	1621	418	365	783	2404	1621	783	2404
Polonuevo	1 369	1 312	2681	260	187	447	3 128	2681	447	3 128
Puerto Colombia	2 447	2 419	4 866	1 236	1 019	2 255	7 151	4 866	2 255	7 151
Repelon	1 677	1 633	3 310	1 532	1 414	2 946	6 256	3 310	2 946	6 256
Sabanagrande	1 141	1 244	2 385	127	75	202	2 587	2 385	202	2 587
Sabanalarga (6)	5 49	5 783	11 432	7 965	7 262	15 227	26 659	11 432	11 053	26 659
Santo Tomas	1 003	1 186	2 189	407	335	742	4 231	3 489	742	4 231
Soledad	5 522	5 838	11 500	319	236	555	12 055	11 500	555	12 055
Suan (7)	1 172	1 239	2 411	1 535	1 502	3 037	5 448	2 371	77	5 448
Tubara	1 211	1 164	2 375	533	474	1 007	3 382	2 375	1 007	3 382
Usiacuri	1 361	1 541	2 902	223	152	375	3 277	2 902	375	3 277
Totales	111 375	119 235	230 610	20 254	17 545	37 799	268 409	237 744	30 665	268 409

DEPARTAMENTO DE BOLIVAR

Cartagena (8)	33 512	39 578	73 190	5 865	5 882	11 747	84 937	76 457	8 480	81 937
Achi (9)	382	529	911	6 592	5 877	12 569	13 480	1 800	11 680	13 480
Arjona (10)	5 055	5 361	10 416	2 447	1 987	4 434	14 850	12 147	2 703	14 850
Ayapel (11)	724	900	1 624	9 512	8 089	17 601	19 225	5 256	13 969	19 225
Barranco de Loba	681	753	1 434	1 565	1 475	3 040	4 474	—	4 474	4 474

(Continua)

Poblacion de Colombia por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SEGUN HABITACION EN LA ALFICIA DE LOS MUNICIPIOS O EN CIUDADES Y LOCALIDADES						Cien total	POBLACION CLASIFICADA EN CIUDAD Y RURAL		
	En la cabecera del municipio			En otras localidades				Urbana	Rural	Cien total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				

DEPARTAMENTO DE BOLIVAR - (Conclusion)

Bodega Central	213	230	443	3849	3885	7734	8177	—	8177	8177
Carmelo	201	318	519	2160	2230	4390	5032	—	5032	5032
Cedeno (12)	3236	3698	6934	4441	4242	8683	15617	12154	3465	15617
Cimarron	3582	4646	8228	7296	6320	13916	22144	8298	13916	22144
Cocle	2033	2470	4503	5831	5901	11732	16235	4503	11732	16235
Cruces de Oro	2213	2757	4970	4743	4528	9271	14241	4970	9271	14241
Cordoba	708	840	1548	2633	2303	4936	6484	1548	4936	6484
Corozal (13)	1301	2618	4519	8621	8692	17313	21832	8249	13583	21832
Chimú	767	874	1641	2048	2037	4115	5766	1641	4115	5756
Chimú	1719	2234	3953	3040	3027	6067	10070	3953	6067	10000
El Caimo	1247	1203	2450	1307	1243	2550	5000	2450	2550	5000
El Caimo (14)	2706	3440	6146	17674	17507	35181	41327	10176	31151	41327
Maguacoe (15)	4557	513	9770	8642	8997	17609	27379	18336	9043	27379
Mahutis	1611	1621	3232	3302	2784	6086	9321	3232	6086	9321
Majual	805	941	1746	6039	5510	11549	13301	1752	11549	13301
Mantua	982	1064	2046	2494	2354	4847	6893	2046	4847	6893
Mantua La Laja (16)	2076	2146	4222	3740	3829	7569	11791	5879	5912	11791
Momil (17)	1706	1255	2961	2998	3049	6047	8508	4779	3729	8508
Mompis	2849	3845	6694	6476	6186	12662	19656	6694	12962	19656
Montaña	5625	7173	12804	21591	23777	51368	61192	12801	51368	64192
Moravia	627	826	1453	792	743	1535	2988	—	2988	2988
Ovejas	1330	1841	3171	2572	2523	5095	8416	3371	5045	8416
Palmito	971	1111	2082	646	501	1147	3229	2082	1147	3229
Pamplona	532	673	1205	3943	3701	7644	8849	—	8849	8849
Pamplona (18)	670	875	1545	2174	2100	4274	5759	1507	4252	5759
Sabanal	1946	2362	4308	11158	10466	21624	25932	4308	21624	25932
Sampués (19)	1495	2182	3677	2935	2889	5824	9481	5220	4261	9481
San Andrés de Sotavento	843	1116	1959	6382	6137	12519	14478	1959	12519	14478
San Antero	2115	2210	4325	1074	912	1986	6291	4355	1935	6291
San Lorenzo Abad	58	616	1134	4570	4428	8998	10132	—	10132	10132
San Carlos	702	793	1495	3365	3140	6505	8000	—	8000	8000
San Estanislao	2362	2408	4770	903	843	1746	6516	4770	1746	6516
San Vicente	2666	3195	5861	2026	1585	3611	9502	5891	3611	9502
San Juan Nepomuceno	1897	2227	4124	3449	2538	5987	10111	4124	5987	10111
San Marcos	1021	1461	2482	3170	2935	6105	8587	2482	6105	8587
San Martín de Loba	734	900	1634	3122	2908	6030	7661	1634	6030	7664
San Onofre	1366	1571	2937	6510	6168	12678	15645	2937	12708	15645
San Pelayo	768	896	1664	6819	6791	13610	15294	1684	13610	15294
Santa Catalina	522	481	1003	1239	1170	2409	3442	—	3442	3442
Santa Rosa (20)	1072	1039	2111	1817	1412	3229	5340	3681	1659	5340
Simón	757	818	1575	1114	857	1971	3546	157	1971	3546
Sinca (21)	3722	4555	8277	7392	7171	14563	22850	18020	4830	22850
Sincajo (22)	4749	6265	11014	4374	4133	8507	19521	12689	5832	19521
Soplayito	1350	1432	2782	1042	983	2025	4807	2782	2025	4807
Sucac	1050	1435	2485	5824	5595	11419	13901	2485	11419	13901
Tolu	2252	2717	4969	1301	998	2302	7271	4969	2302	7271
Tolurejo	504	657	1161	2821	2559	5380	6741	—	6741	6741
Turbaco	4377	4600	8977	1009	759	1768	10745	8977	1738	10745
Turbana	1799	1772	3571	391	363	754	4325	3571	754	4325
Villanueva	1665	1913	3578	601	512	1113	4992	3879	1113	4992
Zumbato	1341	1560	2901	1488	1145	2633	5524	2901	2633	5534
San Fernando	483	629	1112	1467	436	2903	4015	—	4015	4015
Caño Le Loro	741	563	1304	43	56	100	1112	—	1112	1112
Totales	130285	153564	283849	248777	232568	481345	765194	320913	444281	765194

DEPARTAMENTO DE BOYACA

Tunja	7502	9095	16597	1716	1923	3639	20236	16597	3639	20236
Almendra	81	111	192	2759	2803	5562	5794	—	2754	5794
Arcabuco	207	206	413	1422	1528	2950	3363	—	363	3363
Belen	399	586	985	2146	2607	4753	5736	—	5738	5738
Bethulia	84	126	210	1706	2098	3804	4014	—	4014	4014
Boavita	78	681	1209	4294	4491	8785	9994	—	9994	9994
Boyacá	161	209	370	3536	4032	7568	7958	—	7958	7958
Briceño	48	56	104	2632	612	5304	5408	—	5408	5408

(Continua)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SEGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL			
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural	Gran Total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				

DEPARTAMENTO DE BOYACA - (Continuacion)										
Buenavista	96	97	193	2 115	2 123	4 238	4 431	—	1 431	4 431
Busbanza	41	46	87	1 517	1 537	3 054	3 061	—	1 061	3 061
Caldas	36	66	102	2 242	2 922	5 164	5 265	—	5 266	5 266
Campohermoso	175	149	324	5 037	4 700	9 737	10 011	—	10 011	10 011
Capilla de Tensa	136	202	338	1 754	2 13	3 867	4 205	—	4 205	4 205
Cerinsa	169	232	401	1 436	1 811	3 247	3 714	—	3 714	3 714
Cienega	121	171	292	2 014	2 139	4 153	4 445	—	4 445	4 445
Combita	62	8	70	2 784	3 158	5 942	6 082	—	6 082	6 082
Coper	154	173	327	2 561	2 175	4 736	5 163	—	5 163	5 163
Corrales	523	139	662	1 053	1 229	2 282	3 514	—	3 514	3 514
Covarachia	109	141	250	2 312	2 380	4 692	4 972	—	4 972	4 972
Cucaita	121	125	246	666	657	1 323	1 569	—	1 569	1 569
Cutiva	79	102	181	836	1 199	2 035	2 216	—	2 216	2 216
Chameza	160	153	313	2 181	1 912	4 093	4 445	—	4 445	4 445
Chinavita	89	168	257	2 271	2 399	4 670	4 927	—	4 927	4 927
Chiquinquira	2 905	4 093	6 998	6 344	7 119	13 463	20 461	6 998	13 463	20 461
Chiquisa	36	29	65	1 215	1 303	2 518	2 613	—	2 613	2 613
Chiscas	371	464	835	4 538	4 971	9 509	10 344	—	10 344	10 344
Chita	48	585	633	7 003	7 166	14 169	15 182	—	15 182	15 182
Chitaraque	100	151	251	2 286	2 174	4 460	4 711	—	4 711	4 711
Chivatá	64	66	130	1 197	1 247	2 444	2 574	—	2 574	2 574
Duitama	1 559	2 214	3 773	4 263	4 958	9 221	11 994	3 773	9 221	12 991
El Cocuy	1 003	1 355	2 358	3 967	4 365	8 332	10 690	2 358	8 332	10 690
El Espino	137	232	369	2 302	2 525	4 827	5 196	—	5 196	5 196
Envigado	88	562	650	2 789	3 260	6 049	6 999	—	6 999	6 999
Florista	183	259	442	2 131	2 953	5 084	5 526	—	5 526	5 526
Gachantiva	60	83	143	1 753	2 151	3 904	4 047	—	4 047	4 047
Gámeza	215	315	530	2 064	2 532	4 596	5 126	—	5 126	5 126
Garagoa	451	798	1 249	3 752	4 061	7 813	9 062	—	9 062	9 062
Guacamayas	228	314	542	2 106	2 269	4 375	4 977	—	4 977	4 977
Guateque	862	1 241	2 103	2 667	3 173	5 840	8 043	2 103	5 940	8 043
Guayabal	188	302	490	3 997	4 259	8 256	8 746	—	8 746	8 746
Guicán	738	890	1 628	2 878	3 055	5 933	7 591	1 628	5 963	7 591
Iza	192	246	438	878	911	1 789	2 177	—	2 177	2 177
Jenesano	184	244	428	3 792	4 397	8 189	8 618	—	8 618	8 618
Leicoe	248	311	559	2 906	3 122	6 028	6 587	—	6 587	6 587
La Salina	415	431	846	1 772	1 842	3 614	3 794	—	3 794	3 794
La Uvita	438	442	880	2 914	3 235	6 149	7 029	—	7 029	7 029
Labranzagrande	448	457	905	2 250	2 347	4 597	5 502	—	5 502	5 502
Leizaola	320	555	875	1 493	1 577	3 070	3 905	—	3 905	3 905
Macanal	126	175	301	4 112	4 178	8 290	8 592	—	8 592	8 592
Manare	53	68	121	757	708	1 465	1 586	—	1 586	1 586
Mani	73	68	141	185	129	314	455	—	455	455
Maripí	95	90	185	3 846	3 661	7 507	7 692	—	7 692	7 692
Marroquin	166	150	316	1 395	1 197	2 592	2 908	—	2 908	2 908
Miraflores	881	1 185	2 066	5 189	5 195	10 384	12 450	2 066	10 384	12 450
Monqueva	279	345	624	1 942	2 427	4 369	4 991	—	4 999	4 999
Monquí	371	514	885	1 861	1 555	3 416	3 720	—	3 720	3 720
Moniquirá	1 022	1 397	2 419	6 137	6 588	12 725	15 444	2 419	13 025	15 444
Moreno	142	151	293	1 772	1 665	3 437	3 777	—	3 777	3 777
Motavita	64	71	135	918	1 024	2 002	2 137	—	2 137	2 137
Muzo	180	182	362	2 695	2 376	5 071	5 433	—	5 433	5 433
Nobsa	171	211	382	1 079	1 354	2 433	2 815	—	2 815	2 815
Nuevo Colon	55	116	171	2 006	2 224	4 230	4 401	—	4 401	4 401
Nuncha	319	456	775	1 835	1 552	3 387	4 332	—	4 332	4 332
Oicé	45	52	97	1 143	1 297	2 440	2 377	—	2 377	2 377
Orocú	323	275	598	1 298	1 074	2 372	2 970	—	2 970	2 970
Pachavita	91	153	244	2 484	2 147	4 631	5 465	—	5 465	5 465
Páipa	395	610	1 005	4 181	4 733	8 914	9 973	—	9 973	9 973
Páijito	67	36	103	331	331	662	733	—	733	733
Pánuiba	119	261	380	1 549	1 941	3 490	3 673	—	3 673	3 673
Pánuiba	86	55	141	4 279	4 601	8 880	8 461	—	8 461	8 461
Pánuiba	58	54	112	555	613	1 168	1 386	—	1 386	1 386
Pánuiba	96	98	194	1 927	2 136	4 063	4 557	—	4 557	4 557
Pánuiba	448	69	517	4 585	4 931	9 516	10 662	—	10 662	10 662
Pánuiba	45	38	83	276	322	598	681	—	681	681

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SIGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL			
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural	Gran total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				
DEPARTAMENTO DE BOYACA - (Conclusion)										
Pore	55	59	114	606	524	1 130	1 244	—	1 244	1 244
Puebloviejo	270	353	623	5 550	5 553	11 103	11 726	—	11 726	11 726
Ramiriquí	361	474	835	3 358	3 818	7 176	8 011	—	8 011	8 011
Riquirí	142	166	308	4 468	4 057	8 525	8 833	—	8 833	8 833
Recetor	127	100	227	543	534	1 077	1 304	—	1 304	1 304
Rondon	200	186	386	1 853	1 932	3 785	4 171	—	4 171	4 171
Saboyá	192	297	489	7 597	7 780	15 377	15 865	—	15 866	15 866
Sacama	125	71	196	117	86	203	399	—	399	399
Samacá	327	383	710	2 650	2 900	5 550	6 260	—	6 260	6 260
Berbeo	125	124	249	2 188	2 089	4 277	4 526	—	4 526	4 526
San José de Parí	119	131	250	2 412	2 172	4 584	4 834	—	4 834	4 834
Santa Ana	249	358	607	4 397	4 554	8 951	9 558	—	9 558	9 558
San Mateo	89	252	441	2 257	2 090	4 347	4 788	—	4 788	4 788
Santa Rosa de Viterbo	1 044	1 075	2 119	1 611	2 021	3 632	5 719	2 119	3 632	5 751
Santa Sofía	77	112	189	1 921	2 132	4 053	4 242	—	4 242	4 242
Sitivanorte	154	196	350	2 499	2 801	5 300	5 350	—	5 650	5 650
Sitivasur	147	199	346	1 334	1 474	2 758	3 104	—	3 104	3 104
Sachica	43	50	93	474	505	979	1 072	—	1 072	1 072
Siachoque	213	284	497	2 177	2 293	4 470	4 967	—	4 967	4 967
Soata	954	1 318	2 272	5 644	5 912	11 555	13 828	2 272	11 556	13 828
Socotá	371	485	856	5 442	5 998	11 440	12 296	—	12 296	12 295
Socha	391	483	874	2 745	3 279	6 024	6 898	—	6 898	6 898
Sogamoso	2 125	3 091	5 216	7 820	8 643	16 463	21 679	5 216	16 463	21 679
Sora	183	192	375	717	856	1 573	1 948	—	1 948	1 948
Soracá	137	159	296	1 320	1 448	2 768	3 064	—	3 064	3 064
Sotaquirá	136	204	340	2 657	3 095	5 752	6 092	—	6 092	6 092
Sonondoco	250	371	621	3 019	3 323	6 342	6 943	—	6 943	6 943
Susacon	249	340	589	2 069	2 453	4 522	5 101	—	5 101	5 101
Sutamarchán	155	170	325	2 290	2 468	4 758	5 083	—	5 083	5 083
Sutatensa	98	133	231	3 179	3 482	6 661	6 892	—	6 892	6 892
Tamara	414	487	901	1 743	1 802	3 545	4 446	—	4 446	4 446
Tasco	229	346	575	2 645	2 986	5 631	6 206	—	6 206	6 206
Ten	50	43	93	61	373	434	827	—	827	827
Tensa	157	300	457	2 773	3 174	5 947	6 404	—	6 404	6 404
Tibana	218	284	502	4 833	5 215	10 048	10 550	—	10 550	10 550
Tibasosa	287	404	691	1 828	2 175	4 003	4 694	—	4 694	4 694
Tinjacá	56	100	156	1 538	1 813	3 351	3 507	—	3 507	3 507
Toca	320	466	786	2 222	2 434	4 656	5 442	—	5 442	5 442
Togüí	196	236	432	2 202	2 127	4 329	4 761	—	4 761	4 761
Tópaga	260	273	533	1 137	1 371	2 508	3 041	—	3 041	3 041
Tota	171	209	380	2 685	2 963	5 648	6 028	—	6 028	6 028
Trinidad	146	137	283	1 105	1 008	2 113	2 396	—	2 396	2 396
Tumecque	298	364	662	2 636	3 308	5 944	6 605	—	6 606	6 606
Tuta	249	348	597	2 182	2 572	4 754	5 351	—	5 351	5 351
Tutasa	93	100	193	1 025	1 080	2 105	2 299	—	2 299	2 299
Umbita	251	281	532	3 248	3 504	6 752	7 287	—	7 287	7 287
Ventquemada	109	135	244	2 995	3 505	6 500	6 744	—	6 744	6 744
Viracachá	260	290	550	2 248	2 115	4 363	4 913	—	4 913	4 913
Zipatón	14	1	25	525	411	936	964	—	964	964
Zetaquirá	140	209	349	2 585	2 467	5 052	5 401	—	5 401	5 401
Territorio Vasquez (23)	—	—	—	2 272	1 713	4 015	4 015	—	4 015	4 015
Totales	42 191	54 809	97 000	309 287	331 081	640 368	737 368	47 549	689 819	737 368

DEPARTAMENTO DE CALDAS

Manizales	21 813	27 212	51 025	20 026	14 976	35 002	86 027	51 025	35 002	86 027
Aguadas	3 090	4 541	7 631	11 049	10 814	21 863	29 494	7 631	21 863	29 494
Anserma	2 486	2 972	5 458	7 341	7 015	14 356	19 814	5 458	14 356	19 814
Apía (24)	1 539	1 773	3 312	7 297	6 641	13 938	17 250	5 555	11 695	17 250
Atánciz	1 605	1 946	3 551	5 448	4 998	10 446	13 997	3 551	10 446	13 997
Armenia (25)	14 373	15 300	29 673	11 638	9 527	21 165	50 838	34 304	16 534	50 838
Balboa	512	568	1 080	3 083	2 742	5 825	6 905	—	6 905	6 905
Belalcázar (26)	1 151	1 318	2 469	5 758	5 168	10 926	13 475	4 043	9 382	13 425
Calarcá (27)	3 451	4 002	7 453	15 824	11 953	27 777	35 230	12 855	22 375	35 230
Circasia	1 509	1 847	3 356	4 383	3 721	8 104	11 460	3 356	8 104	11 460

(Continúa)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SEGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA O RURAL		
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total			

DEPARTAMENTO DE CALDAS - (Conclusion)

Chinchina	1 910	2 236	4 146	4 099	3 483	7 582	11 728	4 146	7 582	11 728
Filadelfia	726	869	1 595	4 575	4 030	8 555	10 150	1 595	8 555	10 150
Filandia	1 694	1 886	3 580	4 772	3 781	8 506	12 086	3 580	8 506	12 086
Genoca	1 196	1 207	2 403	3 235	2 454	5 689	8 092	2 403	5 689	8 092
Guatava	775	827	1 597	3 557	3 477	7 074	8 631	1 597	7 034	8 631
La Dorada	3 140	2 825	5 965	1 423	869	2 297	8 257	5 965	2 297	8 257
Manzanares	1 300	1 788	3 088	5 647	5 493	11 140	14 228	3 088	11 140	14 228
Marmato	376	111	787	1 560	1 378	2 888	3 675	—	3 675	3 675
Marquetalia	612	657	1 269	2 049	2 517	5 166	6 435	—	6 435	6 435
MarSELLA	1 500	1 880	3 380	5 845	4 909	10 754	14 134	3 380	10 754	14 134
Marulanda	543	625	1 168	2 165	1 895	4 06	5 229	—	5 229	5 229
Medellin	553	589	1 142	2 983	2 516	5 499	6 641	—	6 641	6 641
Mocatin	1 707	19 5	3 632	8 283	7 210	15 493	19 125	3 632	15 493	19 125
Montenegro	1 874	2 129	4 003	4 510	3 373	7 943	11 916	4 003	943	11 946
Neira	2 067	2 287	4 349	8 163	6 948	15 111	19 460	4 349	15 111	19 460
Picora	1 416	1 807	3 223	8 591	8 157	16 848	20 071	3 223	16 848	20 071
Palestina	671	838	1 509	3 963	2 955	6 918	8 427	1 509	6 918	8 427
Pensylvania	1 252	1 684	2 936	9 321	8 895	18 216	21 152	2 936	18 216	21 152
Pereira	14 389	16 373	30 762	16 165	13 555	29 730	60 497	30 762	29 730	60 492
Pueblorrico	389	472	861	1 621	1 407	3 023	3 884	—	3 884	3 884
Pijao	912	895	1 807	6 806	4 993	11 799	13 606	1 807	11 799	13 606
Quimbaya	1 655	1 777	3 472	5 876	4 357	10 233	13 600	3 472	10 233	13 600
Quinchia	1 267	1 529	2 96	5 757	5 711	11 479	14 275	2 96	11 479	14 275
Riosucio	2 538	3 263	5 801	10 767	11 121	21 883	27 684	5 801	21 883	27 684
Risaralda	1 081	1 240	2 324	6 610	5 778	12 388	14 712	2 324	12 388	14 712
Salamina	2 611	3 577	6 183	10 310	9 988	20 298	26 481	6 183	20 298	26 481
Salento	800	923	1 723	3 383	2 482	5 870	7 593	1 723	5 870	7 593
Samana	781	966	1 747	6 901	6 390	13 291	15 0 8	1 747	13 291	15 038
Santa Rosa d Cabal	4 020	5 309	9 329	13 308	11 683	24 991	34 320	9 329	24 991	34 320
Santuario	1 481	1 734	3 215	7 797	6 691	4 488	17 03	3 215	14 488	17 703
Supia	939	1 096	2 035	4 402	4 185	8 587	10 622	2 035	8 587	10 622
Victoria	464	591	1 055	1 578	1 271	2 949	4 004	—	4 004	4 004
Villa Maria	1 203	1 451	2 654	5 141	4 197	9 333	11 988	2 654	9 333	11 987
Totales	111 374	129 155	240 529	283 776	245 683	529 439	769 968	246 987	522 981	769 968

DEPARTAMENTO DEL CAUCA

Popayan	8 455	9 837	18 292	6 603	5 743	11 746	30 038	18 292	11 746	30 038
Almayer	343	487	830	6 131	6 619	12 750	13 580	—	13 580	13 580
Bolivar	1 157	1 3 8	2 495	11 635	12 028	23 663	26 158	2 495	23 663	26 158
Buenosaires	313	391	704	4 995	4 857	9 862	10 566	—	10 566	10 566
Cajibío	267	295	562	6 740	6 420	13 160	13 722	—	13 722	13 722
Caldono	240	251	494	4 916	4 862	9 778	10 272	—	10 272	10 272
Caloto	487	559	1 046	5 817	5 975	11 797	12 838	—	12 838	12 838
Corinto	578	650	1 228	4 748	4 352	9 110	10 338	—	10 338	10 338
El Tambo	603	770	1 373	8 899	9 330	18 229	19 552	—	19 552	19 552
Guapi	516	772	1 348	5 408	6 036	11 444	12 792	—	12 792	12 792
Inza	196	267	458	4 083	4 176	8 259	8 717	—	8 717	8 717
Jambalo	161	163	324	1 797	1 810	3 602	3 926	—	3 926	3 926
La Sierra	328	383	711	2 168	1 979	4 147	4 858	—	4 858	4 858
La Vega	304	324	628	5 127	5 276	10 043	11 031	—	11 031	11 031
Lopez	158	173	331	4 286	4 840	9 126	9 457	—	9 457	9 457
Mercaderes	293	348	641	4 520	4 540	9 060	9 701	—	9 701	9 701
Miranda	1 038	1 061	2 107	2 482	2 254	4 736	6 838	2 107	4 736	6 838
Morales	180	200	380	2 484	2 415	4 899	5 279	—	5 279	5 279
Paez (Belalcazar)	179	229	478	6 680	6 773	13 453	13 861	—	13 861	13 861
Patia (El Bordo)	580	614	1 194	6 760	6 964	13 724	14 948	—	14 948	14 948
Puerto Tejada	2 628	2 938	5 566	1 907	1 873	3 780	3 460	56	3 780	9 346
Purace	426	451	880	1 917	1 853	3 770	4 650	—	4 650	4 650
Rosas	257	268	525	1 997	1 995	3 992	4 517	—	4 517	4 517
San Sebastian	125	138	263	3 017	3 200	6 217	6 480	—	6 480	6 480
Santa Rosa	89	89	178	683	577	1 260	1 438	—	1 438	1 438
Santander	2 076	2 345	4 421	6 334	6 291	12 625	17 046	4 421	12 625	17 046
Silvia	987	1 216	2 203	5 972	6 209	12 181	14 384	2 203	12 181	14 384
Sotara	120	131	251	4 573	4 405	8 979	9 230	—	9 230	9 230

(Continua)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SEGUN HABITAT EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA O RURAL		
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total			

DEPARTAMENTO DEL CAUCA - (Conclusion)

Limbo	956	1 182	2 138	4 353	4 267	8 620	10 758	2 138	8 620	10 758
Limboqui	110	141	251	4 787	5 216	10 003	10 314	—	10 314	10 314
Loribio	176	169	345	2 981	2 945	5 926	5 271	—	6 271	6 271
Lotoro	221	202	423	2 810	2 863	5 673	6 165	—	6 165	6 165
Tumaco (28) (Piendamón)	67	76	143	3 433	3 392	6 825	6 968	1 508	5 460	6 968
Totales	24 674	28 502	53 176	150 448	152 416	302 864	356 040	38 725	317 315	356 040

DEPARTAMENTO DE CUNDINAMARCA

Bogotá	144 890	180 768	325 658	2 489	2 166	4 655	330 312	325 658	4 655	330 312
Albán	142	555	997	2 537	2 265	4 802	5 799	—	5 799	5 799
Anapoima	371	459	830	4 566	3 667	8 233	9 063	—	9 063	9 063
Anolima	1 066	1 393	2 459	9 352	9 046	18 398	20 857	2 459	18 398	20 857
Arbeláez	500	555	1 055	3 854	3 374	7 228	8 284	—	8 284	8 284
Beltrán	353	342	695	772	578	1 350	2 045	—	2 045	2 045
Bituma	313	265	578	2 381	2 019	4 400	4 978	—	4 978	4 978
Bojacá	116	143	259	838	854	1 752	2 011	—	2 011	2 011
Bosá	234	407	641	2 041	1 849	3 890	4 531	—	4 531	4 531
Cajicá	285	430	715	2 430	2 501	4 931	5 646	—	5 646	5 646
Capatzen	487	674	1 161	6 351	6 032	12 383	13 497	—	13 497	13 497
Caqueza	1 008	1 411	2 419	5 898	6 373	12 271	14 693	2 419	12 271	14 693
Copacón	209	290	499	1 386	1 374	2 760	3 209	—	3 209	3 209
Cogua	105	102	207	2 281	2 333	4 614	4 871	—	4 871	4 871
Cotac	109	136	245	823	918	1 741	1 986	—	1 986	1 986
Cucunubá	152	237	389	2 096	2 364	4 460	4 849	—	4 849	4 849
Chaguani	226	286	512	2 574	2 156	4 730	5 242	—	5 242	5 242
Chía	508	1 077	1 585	3 058	3 467	6 525	8 110	1 585	6 525	8 110
Chipaqué	392	581	973	3 071	3 452	6 523	7 496	—	7 496	7 496
Choachí	291	431	722	3 580	3 522	7 102	7 824	—	7 824	7 824
Chocoma	844	1 197	2 041	4 288	4 425	8 713	10 754	2 041	8 713	10 754
Carupí	299	358	657	4 349	4 300	8 649	9 306	—	9 306	9 306
El Colegio	526	520	1 046	4 970	4 561	9 531	10 577	—	10 577	10 577
El Leon	152	220	372	4 125	3 854	7 979	8 351	—	8 351	8 351
Enativá	70	85	165	608	586	1 194	1 359	—	1 359	1 359
Facatativá	4 103	5 676	9 779	2 031	1 866	3 897	13 676	9 779	3 897	13 676
Facatuvá	437	602	1 039	4 379	4 539	8 918	9 957	—	9 957	9 957
Fonolón	1 803	2 530	4 333	1 285	1 463	2 748	7 081	4 333	2 748	7 081
Fosca	344	380	724	2 471	2 601	5 072	5 786	—	5 786	5 786
Fúnez	585	782	1 367	1 235	1 251	2 486	3 857	—	3 857	3 857
Fúquene	94	93	187	1 957	1 971	3 928	4 115	—	4 115	4 115
Fúquima	2 094	2 772	4 866	11 618	10 229	21 847	26 713	4 866	21 847	26 713
Chetivá	551	583	1 134	3 678	3 773	7 451	8 585	—	8 585	8 585
Chicancipa	162	191	353	790	800	1 590	1 943	—	1 943	1 943
Chicota	470	595	1 065	6 766	7 224	13 990	15 055	—	15 055	15 055
Cimac	135	158	293	2 778	3 105	5 883	6 176	—	6 176	6 176
Guadalupe	10 185	12 372	22 557	1 500	1 250	2 750	25 307	22 557	2 750	25 307
Guicheta	232	324	556	2 936	3 297	6 233	6 789	—	6 789	6 789
Guadalupe	840	1 171	2 011	6 618	6 030	12 648	14 659	2 011	12 648	14 659
Guasca	330	431	761	2 440	2 386	4 826	5 587	—	5 587	5 587
Guatiquí	412	455	867	537	517	1 054	1 922	—	1 922	1 922
Guatavita	411	632	1 043	2 120	2 106	4 226	5 269	—	5 269	5 269
Guayabal de Siquima	271	290	561	3 303	2 872	6 125	6 686	—	6 686	6 686
Guineá	245	248	493	1 405	1 476	2 881	3 374	—	3 374	3 374
Jerusalén	156	137	293	1 527	1 310	2 837	3 130	—	3 130	3 130
La Mesa	1 478	1 966	3 444	5 520	4 923	10 543	13 987	3 444	10 543	13 987
La Tablaza	121	141	262	974	2 844	5 918	6 180	—	6 180	6 180
Junín	183	304	487	6 317	7 109	13 426	13 913	—	13 913	13 913
La Palma	1 214	1 516	2 730	6 933	6 501	13 434	16 167	2 730	13 434	16 167
La Peña	347	348	695	3 391	3 320	6 611	7 309	—	7 309	7 309
La Vega	503	611	1 114	4 085	3 518	7 603	8 757	—	8 757	8 757
Leónmuque	182	254	436	2 533	2 712	5 245	5 681	—	5 681	5 681
Macetá	519	462	981	9 445	7 976	17 421	18 402	—	18 402	18 402
Medellín	997	1 258	2 255	1 273	1 344	2 617	4 872	2 255	2 617	4 872
Medina	148	246	394	4 669	4 559	9 228	9 622	—	9 622	9 622
Medina	290	288	578	1 996	1 718	3 714	4 322	—	4 322	4 322

(Continúa)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXO SEGUN HABITACION EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES							POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL		
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural	Gran total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				

DEPARTAMENTO DE CUNDINAMARCA - (Conclusion)

Mosquera	699	787	1 486	1 247	1 068	2 315	3 801	—	3 801	3 801
Narino	486	422	908	489	372	861	1 769	—	1 769	1 769
Nemocon	610	810	1 420	1 791	1 102	3 496	4 915	—	4 916	4 916
Nilo	114	161	335	2069	1 723	3 792	4 117	—	4 127	4 127
Nimaima	92	99	191	1 785	1 62	3 409	3 600	—	3 600	3 600
Nocaima	307	322	629	3 037	2 449	5 486	6 115	—	6 115	6 115
Pacho	1 273	1 882	3 155	10 492	10 133	20 625	23 780	3 155	20 625	23 780
Paima	118	140	258	2 664	2 471	5 085	5 343	—	5 343	5 343
Pandi	239	231	473	5 666	4 957	10 623	11 096	—	11 096	11 096
Pasca	203	228	431	3 254	3 116	6 370	6 801	—	6 801	6 801
Puerto Triunfo	169	132	301	2 248	1 235	3 483	3 784	—	3 784	3 784
Puli	316	369	685	2 001	1 790	3 791	4 476	—	4 476	4 476
Quebradanegra	119	230	409	1 957	1 888	3 845	4 254	—	4 254	4 254
Quetame	450	531	987	2 573	2 658	5 231	6 218	—	6 218	6 218
Quipile	261	318	579	5 872	4 913	10 785	11 364	—	11 364	11 364
Ricaurte	179	156	335	2 77	2 177	4 554	4 889	—	4 889	4 889
San Antonio	91	104	198	3 378	2 979	6 357	6 555	—	6 555	6 555
San Bernardo	497	612	1 109	3 580	3 310	6 890	7 999	—	7 999	7 999
San Cayetano	214	298	512	3 553	3 92	6 645	7 157	—	7 157	7 157
San Francisco	159	166	325	2 108	1 797	3 905	4 230	—	4 230	4 230
San Juan de Rioseco	658	887	1 545	5 434	4 722	10 156	11 701	1 545	10 156	11 701
Sasaima	350	437	797	3 097	2 787	5 884	6 681	—	6 681	6 681
Sesquile	119	253	432	2 036	2 073	4 109	4 541	—	4 541	4 541
Simijaca	241	372	613	1 897	2 124	4 021	4 634	—	4 634	4 634
Soacha	813	1 143	2 006	7 383	5 770	13 153	15 159	2 006	13 153	15 159
Sopo	330	443	773	994	909	1 903	2 676	—	2 676	2 676
Suba	203	178	381	1 375	1 349	2 724	3 105	—	3 105	3 105
Subachoque	239	372	611	3 126	3 155	6 281	6 942	—	6 942	6 942
Suesca	133	110	303	3 317	3 085	6 402	6 705	—	6 705	6 705
Supatá	232	323	555	2 235	2 147	4 382	4 937	—	4 937	4 937
Susa	216	309	525	2 252	2 336	4 588	5 113	—	5 113	5 113
Sutatausa	56	77	133	975	1 070	2 045	2 178	—	2 178	2 178
Talibá	130	229	359	1 316	1 389	2 705	3 064	—	3 064	3 064
Tausa	154	182	336	1 788	1 704	3 492	3 828	—	3 828	3 828
Tena	154	170	330	2 251	1 979	4 180	4 510	—	4 510	4 510
Tenjo	168	308	476	1 885	2 041	3 926	4 402	—	4 402	4 402
Tibacuy	115	141	256	1 901	1 681	3 582	3 838	—	3 838	3 838
Tibirita	186	249	435	2 090	516	1 606	5 041	—	5 041	5 041
Tocaima	1 678	2 049	3 727	5 687	5 056	10 743	14 410	3 727	10 743	14 470
Tocancipá	151	200	354	909	909	1 818	2 172	—	2 172	2 172
Topaipi	194	212	406	4 138	551	8 189	8 595	—	8 595	8 595
Ubalá	110	196	306	5 538	5 433	10 971	11 337	—	11 337	11 337
Ubaque	263	349	612	2 939	3 309	6 248	6 860	—	6 860	6 860
Ubalé	1 075	1 607	2 682	3 411	3 832	7 243	9 925	2 682	7 243	9 925
Une	424	509	933	2 558	2 687	5 275	6 208	—	6 208	6 208
Usaquen	400	432	832	2 463	1 372	3 785	4 617	—	4 617	4 617
Usme	84	80	164	2 248	2 085	4 333	4 497	—	4 497	4 497
Utica	693	785	1 478	1 331	1 307	2 638	4 116	—	4 116	4 116
Verera	216	355	631	4 446	4 294	8 740	9 371	—	9 371	9 371
Vianí	176	233	409	2 729	2 452	5 181	5 590	—	5 590	5 590
Villapinzón	363	463	826	2 986	3 401	6 387	7 213	—	7 213	7 213
Villeta	1 064	1 205	2 269	4 168	3 414	7 612	9 881	2 269	7 612	9 881
Viotá	656	685	1 341	5 345	4 799	10 144	11 485	—	11 485	11 485
Yacopi	219	272	491	8 197	7 802	15 999	16 490	—	16 490	16 490
Zipaquirá	2 974	3 981	6 955	2 636	2 682	5 318	12 273	6 955	5 318	12 273
Agua de Dios	3 433	3 780	7 213	279	207	486	7 699	7 213	486	7 699
Totales	209 472	262 340	471 812	360 727	342 068	702 795	1 174 607	413 689	760 918	1 174 607

DEPARTAMENTO DEL HUILA

Neiva	6 915	8 121	15 036	9 815	9 383	19 198	34 044	16 927	17 367	42 294
Acandé	382	562	944	2 103	2 184	4 287	5 231	—	5 231	5 231
Agrado	1 207	1 718	2 925	888	783	1 671	4 596	2 925	1 671	4 596
Aipe	885	1 035	1 920	2 686	2 516	5 202	7 122	1 920	5 202	7 122

(Continua)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SEGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES							POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL		
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural	Gran total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				

DEPARTAMENTO DEL HUILA - (Conclusion)

Algeciras	403	499	902	2 405	2 000	4 405	5 307	—	5 307	5 307
Altamira	459	686	1 145	439	423	862	2 007	—	2 007	2 007
Baraya	607	764	1 371	2 770	2 261	5 031	6 402	—	6 402	6 402
Campoalegre	1 671	2 251	3 922	2 847	2 494	5 341	9 263	3 922	5 341	9 263
Carnicerias	697	817	1 514	1 960	2 044	4 004	5 518	1 514	4 004	5 518
Colombia	546	693	1 239	2 705	2 594	5 299	6 538	—	6 538	6 538
Elias	269	292	561	2 504	2 838	5 342	5 903	—	5 903	5 903
Carzon	1 797	2 570	4 367	4 710	4 696	9 406	13 773	4 367	9 406	13 773
Gigante	969	1 099	2 068	3 551	3 565	7 116	9 184	2 068	7 116	9 184
Guadalupe	679	917	1 596	1 527	1 603	3 130	4 726	1 596	3 130	4 726
Hobo	88	893	1 681	707	488	1 195	2 876	1 681	1 195	2 876
Iquira	446	555	1 001	1 106	1 035	2 141	3 142	—	3 142	3 142
La Plata	817	1 080	1 897	3 316	3 241	6 557	8 454	1 897	6 557	8 454
Paicol	245	314	559	881	828	1 709	2 268	—	2 268	2 268
Palermo	803	1 174	1 983	4 098	3 560	7 658	9 641	1 983	7 658	9 641
Pital	558	713	1 271	1 166	1 060	2 226	3 497	—	3 497	3 497
Pitalito	1 315	1 790	3 135	6 167	6 464	12 631	15 766	3 135	12 631	15 766
San Agustín	709	829	1 538	4 310	3 894	8 204	9 742	1 538	8 204	9 742
Suaza	759	1 008	1 767	2 540	2 694	5 234	7 001	1 767	5 234	7 001
Tinamón	1 114	1 593	2 713	2 852	3 133	5 985	8 698	2 713	5 985	8 698
Tello	883	980	1 863	3 305	2 886	6 191	8 054	1 863	6 191	8 054
Teruel	349	457	816	1 301	1 209	2 510	3 326	—	3 326	3 326
Toré	524	760	1 284	3 002	3 034	6 036	7 320	—	7 320	7 320
Villavieja	444	546	990	1 612	1 606	3 218	4 208	—	4 208	4 208
Yacuarí	712	1 018	1 730	633	456	1 089	2 819	1 730	1 089	2 819
Totales	28 048	35 750	63 798	77 806	74 972	152 878	216 676	53 546	163 130	216 676

DEPARTAMENTO DEL MAGDALENA

Santa Marta (30)	11 587	13 526	25 113	4 467	3 665	8 132	33 245	27 259	5 986	33 245
Aguachica	1 140	1 317	2 457	4 834	4 174	9 008	11 765	2 457	9 308	11 765
Aracataca (31)	1 983	1 915	3 898	6 575	5 388	11 963	15 861	8 159	7 702	15 861
Barrancas	712	830	1 542	1 849	1 941	3 790	5 332	1 542	3 790	5 332
Cerro de San Antonio (32)	1 252	1 256	2 508	4 109	3 945	8 054	10 562	7 401	3 161	10 562
Ciénaga (33)	19 691	12 092	31 783	14 159	10 391	24 550	47 333	32 870	14 463	47 333
Chimichagua	1 092	1 386	2 478	3 301	2 945	6 246	8 724	2 478	6 246	8 724
Chiriguana	1 415	1 673	3 088	2 900	2 767	5 667	8 755	3 088	5 667	8 755
El Banco	2 544	3 082	5 626	3 820	3 799	7 619	13 245	5 626	7 619	13 245
Lonseca	789	937	1 726	1 681	1 530	3 211	4 933	1 722	3 211	4 933
Comarua	914	1 049	1 963	1 495	1 371	2 866	4 829	1 963	2 866	4 829
Conzalez	228	284	512	1 312	1 180	2 492	3 004	—	3 004	3 004
Cuamale	890	1 104	1 994	3 414	3 323	6 737	8 731	1 994	6 737	8 731
La Gloria	570	651	1 221	2 193	1 498	3 691	5 022	—	5 022	5 022
Ledraza	987	952	1 939	2 697	2 387	5 084	7 023	1 939	5 084	7 023
Pinon	1 439	1 422	2 861	2 012	1 952	3 964	6 825	2 861	3 964	6 825
Pivijay	1 551	1 584	3 135	4 755	4 226	8 981	12 116	3 135	8 981	12 116
Plato	2 631	3 183	5 814	4 694	3 847	8 541	14 355	5 814	8 541	14 355
Puebloviejo	938	929	1 867	1 931	1 470	3 401	5 268	1 867	3 401	5 268
Remolino	1 625	1 840	3 465	2 050	1 659	3 719	7 184	3 465	3 719	7 184
Río de Oro	705	933	1 638	2 764	2 522	5 286	6 924	1 638	5 286	6 924
Riohacha	2 474	3 177	5 651	4 231	4 268	8 499	14 150	5 651	8 499	14 150
Robles	637	667	1 304	3 103	2 843	5 946	7 250	—	7 250	7 250
Salamina	1 186	1 238	2 424	1 466	1 172	2 638	5 062	2 424	2 638	5 062
San Juan de Cesar	958	1 277	2 235	3 054	3 496	6 550	8 785	2 235	6 550	8 785
San Sebastian de Buvista	876	850	1 726	3 700	3 701	7 401	9 080	1 726	7 401	9 080
Santa Ana	1 095	1 312	2 407	3 970	3 612	7 582	9 989	2 407	7 582	9 989
Sitionuevo (34)	2 252	2 378	4 630	4 174	3 248	7 422	12 052	6 643	5 409	12 052
Tamalameque	432	611	1 043	1 982	1 880	3 862	4 905	—	4 905	4 905
Tenerife (35)	859	951	1 810	2 601	2 517	5 118	6 931	3 927	3 004	6 931
Valledupar	1 586	1 753	3 339	6 496	5 966	12 462	15 801	3 339	12 462	15 801
Villanueva	1 630	2 121	3 751	1 780	1 750	3 530	7 281	3 751	3 530	7 281
Totales	59 714	68 290	128 004	113 572	100 746	214 318	342 322	149 331	192 991	342 322

(Continúa)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SEGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL			
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural	Gran total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				
DEPARTAMENTO DE NARIÑO										
Pasto	12 484	15 080	27 564	11 154	10 976	22 080	49 644	27 564	22 080	49 644
Alban	470	563	1 033	3 602	3 780	387	8 415	—	8 415	8 415
Aldana	334	394	728	984	998	1 982	2 710	—	2 710	2 710
Ancuva	613	715	1 328	2 800	2 716	5 516	6 844	—	6 844	6 844
Arboledas	314	354	668	3 911	3 865	7 776	8 444	—	8 444	8 444
Barbacoas	1 663	2 076	3 739	7 079	6 757	13 836	17 575	3 739	13 836	17 575
Buesaco	878	898	1 776	3 784	3 786	7 570	9 346	1 776	7 570	9 346
Colon	220	230	450	3 114	3 295	6 409	6 859	—	6 859	6 859
Consaca	525	510	1 035	2 484	2 148	4 632	5 637	—	5 667	5 667
Contadero	768	336	1 104	1 686	1 855	3 541	4 145	—	4 145	4 145
Cordoba	476	537	1 013	3 123	3 407	6 530	7 543	—	7 543	7 543
Cuaspid	371	363	684	1 696	1 658	3 354	4 038	—	4 038	4 038
Cumbal	783	977	1 760	4 796	4 362	8 658	10 418	1 760	8 658	10 418
El Rosario	193	230	423	3 905	3 815	7 720	8 143	—	8 143	8 143
El Tablon	240	263	503	2 156	2 237	4 393	4 896	—	4 896	4 896
El Tambo	641	840	1 481	5 554	5 837	11 391	12 872	—	12 872	12 872
Itunes	800	901	1 707	2 637	2 644	5 281	6 988	1 707	5 281	6 988
Cuachucal	422	465	887	3 359	3 462	6 821	7 708	—	7 708	7 708
Cuamatin	411	466	877	1 065	1 187	2 247	3 124	—	3 124	3 124
Cuaitarilla	830	957	1 787	3 640	3 623	7 263	9 050	1 787	7 263	9 050
Iles	371	397	768	1 433	1 465	2 898	3 666	—	3 666	3 666
Imue	210	244	454	1 978	2 029	3 957	4 411	—	4 411	4 411
Ipiales	3 742	4 601	8 343	8 037	8 159	16 191	24 534	8 343	16 191	24 534
Icuande	210	221	431	5 879	6 168	12 047	12 478	—	12 478	12 478
Ia Cruz	1 184	1 430	2 614	5 631	6 250	11 881	14 495	2 614	11 881	14 495
Ia Florida	306	362	668	3 179	3 144	6 323	6 991	—	6 991	6 991
Ia Union	1 199	1 427	2 626	5 603	5 789	11 392	14 018	2 626	11 392	14 018
Linares	1 519	1 550	3 069	2 529	2 388	4 917	7 986	3 069	4 917	7 986
Los Andes	522	554	1 086	5 404	4 979	10 383	11 469	—	11 469	11 469
Magui	218	267	515	1 677	1 868	3 545	4 060	—	4 060	4 060
Mallama	455	464	919	1 391	1 342	2 733	3 552	—	3 652	3 652
Mosquera	193	205	398	2 308	2 251	4 559	4 957	—	4 957	4 957
O pina	311	361	672	1 459	1 509	2 968	3 640	—	3 640	3 640
Potosi	387	441	823	3 069	3 252	6 321	7 144	—	7 144	7 144
Puerres	495	577	1 067	2 108	2 291	4 399	5 466	—	5 466	5 466
Pupiales	927	1 051	1 978	3 287	3 333	6 655	8 643	1 978	6 665	8 643
Ricaurte	389	393	782	1 978	1 779	3 757	4 539	—	4 539	4 539
Roberto Payan	211	271	482	2 737	2 960	5 697	6 179	—	6 179	6 179
Samaniego	1 508	1 687	3 195	5 144	4 838	9 982	13 177	3 195	9 982	13 177
Sandona (36)	1 572	1 810	3 382	4 675	4 456	9 131	12 513	4 939	7 574	12 513
San Lorenzo	581	643	1 224	3 747	3 874	7 621	8 845	—	8 845	8 845
San Pablo	564	785	1 349	2 462	2 674	5 086	6 435	—	6 435	6 435
Santa Cruz	413	414	827	2 458	2 141	4 599	5 426	—	5 426	5 426
Sapuyes	372	445	817	1 552	1 650	3 212	4 029	—	4 029	4 029
Laminango	333	426	759	2 419	2 467	4 886	5 645	—	5 645	5 645
Tangua	336	395	731	2 995	2 988	5 983	6 714	—	6 714	6 714
Tumaco	4 323	5 348	9 671	12 944	12 467	25 411	35 082	9 671	25 411	35 082
Tuquerres	1 949	2 375	4 324	7 978	7 933	15 911	20 235	4 324	15 911	20 235
Yacuanquer	482	511	993	2 016	2 001	4 017	5 010	—	5 010	5 010
Totales	48 204	56 810	105 014	180 046	180 808	360 854	465 868	77 114	388 754	465 868

DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER

Cucuta (37) (38)	16 837	20 486	37 323	11 775	8 150	19 925	57 248	41 137	16 111	57 248
Abrego	771	1 013	1 784	5 932	6 145	12 077	13 861	1 784	12 077	13 861
Arboledas	894	1 032	1 926	6 076	5 919	12 025	13 951	1 926	12 025	13 951
Bochalema	569	885	1 454	3 682	3 411	7 093	8 547	—	8 547	8 547
Cacota	231	273	504	1 447	1 513	2 960	3 464	—	3 464	3 464
Cachira	281	290	571	2 796	2 867	5 663	6 234	—	6 234	6 234
Convencion	1 387	1 878	3 210	7 428	6 885	14 313	17 523	3 210	14 313	17 523
Cucutilla	350	407	757	4 523	4 463	8 986	9 743	—	9 743	9 743
Chinacota	1 387	1 770	3 157	4 329	3 928	8 257	11 414	3 157	8 257	11 414

(Continúa)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION ESTABLECIDA POR SEXOS SEGUN HABITANTES EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL			
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Con total	Urbana	Rural	Con total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				
DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER — (Conclusion)										
Chitara	524	677	1 201	2 590	2 434	5 024	6 225	—	6 225	6 225
Durania	838	886	1 724	3 942	2 991	6 933	8 657	1 724	6 933	8 657
El Carmen	1 042	1 390	2 432	4 934	3 913	8 847	11 309	2 432	8 877	11 309
Granatote	1 045	1 333	2 378	4 076	3 928	8 004	10 382	2 378	8 004	10 382
Itacani	241	333	574	2 656	2 572	5 228	5 832	—	5 832	5 832
Herrera	253	303	556	1 425	1 357	2 782	3 339	—	3 339	3 339
La Playa	373	425	798	3 810	3 598	7 408	8 206	—	8 206	8 206
Labateca	338	398	736	3 019	2 893	5 912	6 648	—	6 648	6 648
Lourdes	443	418	861	2 247	2 142	4 389	5 250	—	5 250	5 250
Mutiscua	252	302	554	1 638	1 711	3 349	3 903	—	3 903	3 903
Ocana	4 046	5 891	9 937	5 677	6 146	11 823	21 760	9 937	11 823	21 760
Lampiona	5 191	7 335	13 126	3 280	3 650	6 930	20 056	13 126	6 930	20 056
Pamplonita	132	116	278	2 762	2 596	5 358	5 636	—	5 636	5 636
Ragonvalia	300	316	616	1 890	1 678	3 568	4 211	—	4 211	4 211
Rosario	1 163	1 279	2 442	3 028	2 774	5 802	8 244	2 442	5 802	8 244
Salazar	1 351	1 566	3 017	6 009	5 802	11 811	14 828	3 017	11 811	14 828
San Calixto	476	471	947	3 342	2 949	6 291	7 238	—	7 238	7 238
San Cayetano	267	258	525	1 167	1 027	2 194	2 719	—	2 719	2 719
Santiago	399	496	895	1 734	1 573	3 307	4 202	—	4 202	4 202
Sardinata	567	724	1 291	4 987	4 774	9 761	11 052	—	11 052	11 052
Silos	465	513	978	2 345	2 520	5 065	6 043	—	6 043	6 043
Teorama	790	975	1 765	2 241	2 135	4 376	6 141	1 765	4 376	6 141
Toledo (37)	577	671	1 248	6 089	5 597	11 686	12 934	—	12 934	12 934
Villa Caro	351	411	762	4 262	4 351	8 613	9 378	—	9 378	9 378
Totales	44 726	55 631	100 357	127 369	118 455	245 824	346 181	88 035	258 146	346 181

DEPARTAMENTO DE SANTANDER

Bucaramanga	17 819	23 895	41 714	5 171	4 398	9 569	51 283	41 714	9 569	51 283
Aguada	71	125	196	2 705	2 468	5 173	5 369	—	5 369	5 369
Albarran	129	145	274	4 177	4 853	9 030	9 304	—	9 304	9 304
Aratoca	255	375	631	2 147	2 119	4 266	4 897	—	4 897	4 897
Barichara	960	1 514	2 474	4 570	4 866	9 436	11 910	2 474	9 436	11 910
Barrancabermeja	5 251	4 056	9 307	4 182	1 912	6 094	15 401	9 307	6 094	15 401
Betulia	228	392	620	1 718	1 335	3 053	3 673	—	3 673	3 673
Bolívar (39)	163	251	414	11 317	10 698	22 015	22 429	2 630	19 793	22 429
Cabrera	252	377	629	1 899	1 861	3 760	4 389	—	4 389	4 389
California	155	168	323	1 025	1 028	2 053	2 376	—	2 376	2 376
Capitancio	506	677	1 183	2 285	2 244	4 529	5 712	—	5 712	5 712
Carcasi	369	405	774	3 608	3 659	7 267	8 041	—	8 041	8 041
Cepita	241	272	513	1 316	1 301	2 617	3 130	—	3 130	3 130
Cerrito	325	423	748	1 996	2 089	4 085	4 833	—	4 833	4 833
Cite	64	89	153	2 390	2 360	4 750	4 903	—	4 903	4 903
Concepcion	493	686	1 179	3 218	3 224	6 442	7 621	—	7 621	7 621
Confines	151	161	312	985	838	1 823	2 135	—	2 135	2 135
Coromoro	150	153	303	2 286	2 186	4 472	4 775	—	4 775	4 775
Curiti	543	700	1 243	2 019	1 899	3 918	5 161	—	5 161	5 161
Charalá	1 004	1 115	2 119	4 065	3 877	7 942	10 421	2 119	7 942	10 421
Charla	141	153	297	2 494	2 304	4 798	5 095	—	5 095	5 095
Chima	175	252	427	2 065	1 842	3 907	4 334	—	4 334	4 334
Chupata	78	112	190	3 017	3 165	6 182	6 372	—	6 372	6 372
Encino	91	90	181	1 058	1 067	2 125	2 306	—	2 306	2 306
Enciso	296	352	648	3 175	3 073	6 248	6 895	—	6 895	6 895
Floridablanca	789	1 004	1 793	2 784	2 310	5 094	6 887	1 793	5 094	6 887
Guatun	565	621	1 186	2 755	2 653	5 408	6 595	—	6 595	6 595
Guibita	175	224	400	2 953	2 751	5 704	6 107	—	6 107	6 107
Guion	912	1 222	2 134	4 623	3 987	8 610	10 744	2 134	8 610	10 744
Guaca (40)	539	704	1 243	3 214	3 497	6 711	7 954	—	7 954	7 954
Guadalupe	453	945	1 398	2 721	2 459	5 180	6 578	—	6 578	6 578
Guapota	177	219	396	1 344	1 198	2 542	2 968	—	2 968	2 968
Guayana	100	177	277	2 919	3 276	6 195	6 472	—	6 472	6 472
Guepsa	211	288	499	1 353	1 190	2 543	3 042	—	3 042	3 042
Itato	249	302	551	1 015	897	1 912	2 463	—	2 463	2 463

(Continúa)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SEGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL		
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total			

DEPARTAMENTO DE SANTANDER - (Conclusion)

Jesús María	218	354	572	5 623	6 438	12 061	12 033	—	12 633	12 633
Jordan	69	80	149	1 000	1 020	2 020	2 169	—	2 169	2 169
La Paz	60	128	188	2 177	2 242	4 419	4 607	—	4 607	607
Lebrija	556	816	1 372	6 211	5 180	11 391	12 763	—	12 763	12 763
Los Santos	230	268	498	2 063	2 046	4 109	4 607	—	4 607	1 607
Macaravita	100	128	228	3 207	3 067	6 274	6 502	—	6 502	5 502
Malaga	2 291	2 919	5 210	3 160	3 363	6 523	11 733	5 210	6 523	11 733
Matanza	330	441	771	3 467	3 204	6 674	7 445	—	7 445	7 445
Mogotes	652	1 158	1 810	4 949	4 873	9 822	11 632	1 810	9 822	11 632
Molagavita	325	426	751	3 457	3 807	7 264	8 015	—	8 015	8 015
Ocamonte	70	90	160	1 604	1 552	3 156	3 316	—	3 316	3 316
Oiba	406	678	1 084	2 748	2 562	5 310	6 344	—	6 344	6 344
Onzava	309	449	758	4 697	4 407	8 505	9 264	—	9 264	9 264
Palmas del Socorro	230	280	510	1 241	1 144	2 385	2 895	—	2 895	2 895
Palmar	286	312	598	641	653	1 294	1 892	—	1 892	1 892
Piramo	158	147	305	1 474	1 423	2 897	3 202	—	3 202	3 202
Piedicuesta	2 985	3 989	6 974	6 253	4 699	10 952	17 926	6 974	10 952	17 926
Pinchote	180	207	387	1 202	1 073	2 275	2 662	—	2 662	2 662
Puente Nacional	567	819	1 386	6 916	7 250	14 166	15 552	—	15 552	15 552
Puerto Wilches	1 210	845	2 055	3 437	2 385	5 822	7 877	2 055	5 822	7 877
Rionegro	834	997	1 831	13 238	11 010	24 248	26 079	1 831	24 248	26 079
San Andrés	1 034	1 228	2 262	9 744	9 132	18 876	21 138	2 262	18 876	21 138
San Benito	89	80	169	1 834	1 687	3 521	3 690	—	3 690	3 690
San Gil	3 448	4 353	7 801	3 817	3 609	7 426	15 237	7 801	7 426	15 237
San Joaquín	210	275	485	1 971	1 962	3 933	4 418	—	4 418	4 418
San José de Miranda	308	348	656	3 469	3 575	7 044	7 700	—	7 700	7 700
San Miguel	168	192	360	2 802	2 823	5 625	5 985	—	5 985	5 985
San Vicente	1 169	1 433	2 602	6 127	4 858	10 985	13 587	2 602	10 985	13 587
Simacota	616	806	1 422	3 51	3 280	6 822	8 244	—	8 244	8 244
Socorro	3 204	4 687	7 891	4 075	3 962	8 037	15 928	7 891	8 037	15 928
Suaita	572	1 001	1 573	4 419	4 110	8 559	10 132	1 573	8 559	10 132
Sucre	159	196	355	4 562	4 611	9 203	9 558	—	9 558	9 558
Suratá	164	206	370	2 415	2 427	4 842	5 212	—	5 212	5 212
Tona	181	214	395	2 685	2 528	5 214	5 609	—	5 609	5 609
Umpalá	53	47	100	2 309	1 946	4 255	4 355	—	4 355	4 355
Valle	361	441	802	1 984	1 999	3 983	4 885	—	4 885	4 885
Velez	1 289	1 707	2 995	3 784	3 989	7 773	10 769	2 996	7 773	10 769
Zapatoca	1 785	2 832	4 617	3 034	2 809	5 863	10 480	4 617	5 863	10 480
Contratación	2 374	2 864	5 238	960	694	1 654	7 092	5 238	1 854	7 092
Totales	63 335	81 535	144 870	242 291	228 549	470 840	615 710	118 174	497 536	615 710

DEPARTAMENTO DEL TOLIMA

Ibague (41)	12 596	14 852	27 448	18 252	15 747	33 999	61 447	29 049	32 398	61 447
Alpujarra	402	565	967	2 286	2 217	4 503	5 410	—	5 470	5 470
Alvarado	253	292	545	3 544	3 091	6 635	7 180	—	7 180	7 180
Ambalema	1 159	1 708	3 167	2 523	1 713	4 236	7 403	3 157	4 236	7 403
Anzoátegui	390	430	820	6 158	5 116	11 274	12 094	—	12 094	12 094
Armero (42)	3 068	3 233	6 401	4 382	3 301	7 683	14 084	8 179	5 905	14 084
Ataco	248	520	1 068	6 355	5 663	12 028	13 096	—	13 096	13 096
Caimén de Apicalá	552	550	1 102	1 348	1 185	2 533	3 655	—	3 655	3 655
Casabianca	546	517	1 163	3 043	2 793	5 835	6 999	—	6 999	6 999
Coello	302	329	631	3 097	2 944	6 041	6 672	—	6 672	6 672
Covaima (43)	374	445	819	6 095	6 588	12 683	13 502	1 960	11 542	13 502
Cunday	654	808	1 462	8 613	7 043	15 656	17 118	—	17 118	17 118
Cajamarca	1 353	1 661	3 014	5 749	4 621	10 370	13 384	3 014	10 370	13 384
Chaparral	2 343	3 163	5 506	12 831	11 517	24 348	29 854	5 506	24 348	29 854
Dolores	600	763	1 363	3 224	2 777	6 001	7 364	—	7 364	7 364
Espinal (44)	2 475	3 190	5 665	9 882	10 126	20 008	25 674	12 654	13 020	25 674
Flan	445	514	959	6 573	5 932	12 505	13 494	—	13 494	13 494
Fresno	1 787	2 198	3 985	7 969	7 216	15 185	19 110	3 985	15 125	19 110
Guamo	1 463	1 763	3 226	8 254	8 714	16 968	20 194	3 226	16 968	20 194
Heveco	590	607	1 197	4 910	4 195	9 105	10 362	—	10 362	10 362

(Continúa)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Continuacion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SIGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES						POBLACION CLASIFICADA EN URBANA Y RURAL			
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural	Gran total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				
DEPARTAMENTO DEL TOLIMA - (Conclusion)										
Honda	5 536	6 888	12 424	802	497	1 299	13 723	12 424	1 299	13 723
Icononzo	698	818	1 516	4 103	3 707	7 810	9 326	1 516	7 810	9 326
Terida	902	1 026	1 928	4 002	3 497	7 499	9 427	1 928	7 499	9 427
Libano	3 357	4 302	7 659	15 196	13 885	29 081	36 740	7 659	29 081	36 740
Mariquita	1 710	2 107	3 817	3 508	2 806	6 314	10 131	3 817	6 314	10 131
Melgar	627	632	1 259	2 671	2 406	5 077	6 336	—	6 336	6 336
Natagama	1 746	2 320	4 066	5 708	5 971	11 679	15 745	4 066	11 679	15 745
Ortega	1 016	1 227	2 243	10 192	9 952	20 144	22 387	2 243	20 144	22 387
Piedras	408	469	877	1 733	1 679	3 412	4 289	—	4 289	4 289
Prado	472	556	1 028	2 628	2 367	4 995	6 023	—	6 023	6 023
Purificacion	1 898	2 298	4 196	7 675	7 854	15 529	19 725	4 196	15 529	19 725
Rovira	1 190	1 519	2 715	6 772	6 015	12 787	15 502	2 715	12 787	15 502
San Antonio	876	1 152	2 028	7 357	5 907	13 264	15 292	2 028	13 264	15 292
San Luis	518	591	1 109	3 526	3 425	6 951	8 060	—	8 060	8 060
Santa Isabel	908	922	1 830	4 246	3 314	7 560	9 390	1 830	7 560	9 390
Suarez	400	467	867	2 131	2 122	4 253	5 120	—	5 120	5 120
Valle de San Juan	382	442	824	2 859	2 471	5 330	6 154	—	6 154	6 154
Venadillo	1 227	1 432	2 659	5 480	4 805	10 285	12 941	2 659	10 285	12 941
Villahermosa	641	889	1 530	6 222	5 574	11 796	13 326	1 530	11 796	13 326
Totales	56 729	68 465	125 194	221 849	200 753	422 602	547 796	119 351	428 445	547 796

DEPARTAMENTO DEL VALLE DEL CAUCA

Calí	41 457	46 909	88 366	7 573	5 944	13 517	101 883	88 366	13 517	101 883
Alcalá	832	875	1 707	3 028	2 493	5 521	7 228	1 707	5 521	7 228
Andalucía	1 536	1 635	3 171	3 928	3 444	7 372	10 543	3 171	7 372	10 543
Ansermanuevo	1 565	1 631	3 196	11 253	9 601	20 854	24 050	3 196	20 854	24 050
Bolívar	889	1 045	1 934	6 097	5 438	11 535	13 469	1 934	11 535	13 469
Buenaventura (45)	7 491	7 024	14 515	6 524	6 738	13 262	27 777	16 347	11 430	27 777
Buga	8 847	10 748	19 595	5 410	4 044	9 454	29 049	19 595	9 454	29 049
Bugalagrande	876	892	1 768	5 190	4 287	9 477	11 245	1 768	9 477	11 245
Caicedonia	2 565	2 674	5 239	6 637	5 055	11 692	16 931	5 239	11 692	16 931
Candelaria	625	675	1 300	6 326	5 740	12 066	13 366	—	13 366	13 366
Cartago	6 815	7 935	14 750	3 883	3 283	7 166	21 916	14 750	7 166	21 916
Cerrito	1 526	1 896	3 422	4 200	3 097	7 297	10 719	3 422	7 297	10 719
Conto	1 069	1 145	2 214	3 496	2 682	6 178	8 392	2 214	6 178	8 392
Dagua	1 021	1 152	2 173	6 617	5 359	11 976	14 149	2 173	11 976	14 149
La Florida	1 470	1 510	2 980	3 914	3 400	7 314	10 294	2 980	7 314	10 294
Guacarí (46)	1 221	1 295	2 516	6 338	5 426	11 764	14 280	4 835	9 425	14 280
Jamundí	801	917	1 718	4 360	4 113	8 473	10 191	1 718	8 473	10 191
La Cumbre	691	928	1 619	3 919	3 406	7 325	8 944	1 619	7 325	8 944
La Victoria	1 081	1 153	2 234	3 759	3 216	6 975	9 209	2 234	6 975	9 209
Lemos	1 354	1 498	2 852	2 159	1 981	4 140	6 992	2 852	4 140	6 992
Obando	681	683	1 364	4 201	3 388	7 589	8 953	—	8 953	8 953
Palмира (47)	9 886	11 349	21 235	12 990	10 563	23 553	44 788	24 881	19 907	44 788
Pradera	1 674	1 837	3 511	4 237	3 417	7 654	11 165	3 511	7 654	11 165
Riofrío	653	560	1 213	4 832	3 743	8 575	9 788	—	9 788	9 788
Roldanillo	1 447	1 736	3 183	7 138	6 266	13 404	16 587	3 183	13 404	16 587
San Pedro	336	341	677	2 612	2 203	4 815	5 492	—	5 492	5 492
Sevilla (48)	4 974	5 476	10 450	11 547	9 341	20 888	31 338	13 900	17 438	31 338
Toledo	1 485	1 617	3 102	6 005	5 396	11 401	14 503	3 102	11 401	14 503
Tuluá (49)	5 640	6 377	12 017	10 684	8 925	19 609	31 626	18 774	12 852	31 626
Trujillo (50)	1 234	1 252	2 486	5 684	4 668	10 352	12 838	5 069	7 769	12 838
Ulloa	1 010	1 100	2 110	2 005	1 771	3 776	5 886	2 110	3 776	5 886
Versalles (51)	916	1 024	1 940	7 138	6 304	13 442	15 382	3 640	11 742	15 382
Vijes	1 084	1 004	2 088	1 450	1 161	2 611	4 699	2 088	2 611	4 699
Votoco	772	850	1 622	6 347	5 097	11 444	13 036	1 622	11 444	13 066
Yumbo	1 144	1 327	2 471	2 133	1 767	3 900	6 371	2 471	3 900	6 371
Zarzal	2 093	2 194	4 287	3 452	2 382	5 834	10 121	4 287	5 834	10 121
Totales	118 761	132 264	251 025	197 066	165 139	362 205	613 230	268 788	344 442	613 230

(Continúa)

Poblacion de Colombia, por municipios, segun censo de 1938 - (Conclusion)

MUNICIPIOS	POBLACION CLASIFICADA POR SEXOS SIGUN HABITEN EN LA CABECERA DE LOS MUNICIPIOS O EN OTRAS LOCALIDADES							POBLACION CLASIFICADA EN URBANA O RURAL		
	En la cabecera del municipio			En otras localidades			Gran total	Urbana	Rural	Gran total
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total				

INTENDENCIA DEL AMAZONAS

Ileticia	1 095	579	1 674	2 834	1 906	4 740	6 414	1 674	4 740	6 414
----------	-------	-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

INTENDENCIA DEL CHOCO

Quibdo	2 435	2 843	5 278	12 185	12 659	24 844	30 122	5 278	24 844	30 122
Acandí	577	547	1 124	1 721	916	2 137	3 261	—	3 261	3 261
Bagadó	185	203	388	1 877	1 743	3 620	4 008	—	4 008	4 008
Baudó	399	390	789	6 255	6 210	12 465	13 254	—	13 254	13 254
Condoto	404	854	1 558	3 699	3 699	7 398	8 955	1 558	7 398	8 956
El Carmen	411	582	993	2 220	1 388	3 908	4 901	—	4 901	4 901
Istmina (5°)	752	819	1 601	9 248	9 070	18 298	19 899	3 227	16 672	19 899
Juradó	137	126	263	425	421	846	1 109	—	1 109	1 109
Novita	202	216	418	3 063	3 072	6 085	6 503	—	6 503	6 503
Nuquí	228	209	437	1 281	1 223	2 504	2 941	—	2 941	2 941
Riosucio	330	318	648	1 571	1 284	2 855	3 503	—	3 503	3 503
Sipi	105	100	205	951	935	1 886	2 091	—	2 091	2 091
Tadó	561	696	1 263	4 789	4 616	9 405	10 668	—	10 668	10 668
Totales	7 032	7 933	14 965	48 765	47 486	96 251	111 216	10 063	101 153	111 216

INTENDENCIA DEL META

Villavicencio	3 148	2 926	6 074	10 959	7 282	18 241	24 315	6 074	18 241	24 315
El Calvario	1 161	1 098	2 259	95	91	186	2 445	2 259	186	2 445
Restrepo	647	707	1 349	2 892	2 204	5 096	6 445	—	6 445	6 445
San Martín	580	696	1 276	9 415	7 778	17 193	18 469	—	18 469	18 469
Totales	5 536	5 422	10 958	23 361	17 355	40 716	51 674	8 333	43 341	51 674

INTENDENCIA DE SAN ANDRÉS Y PROVIDENCIA

San Andrés	524	619	1 143	1 545	1 573	3 118	4 261	—	4 261	4 261
Providencia	89	95	184	977	1 106	2 083	2 267	—	2 267	2 267
Totales	613	714	1 327	2 522	2 679	5 201	6 528	—	6 528	6 528

COMISARIA DE ARAUCA

Arauca	840	1 031	1 871	2 805	2 609	5 414	7 285	1 871	5 414	7 285
Araucuita	191	170	361	505	446	951	1 312	—	1 312	1 312
Tame	575	579	1 154	753	642	1 405	2 559	—	2 559	2 559
Totales	1 606	1 780	3 386	4 073	3 697	7 770	11 156	1 871	9 285	11 156

COMISARIA DEL CAQUETA

Florencia	2 045	2 119	4 164	9 583	7 167	16 750	20 914	4 164	16 750	20 914
-----------	-------	-------	-------	-------	-------	--------	--------	-------	--------	--------

COMISARIA DE LA GUAJIRA

Uribia	196	144	340	27 561	25 508	53 069	53 409	—	53 409	53 409
--------	-----	-----	-----	--------	--------	--------	--------	---	--------	--------

COMISARIA DEL PUTUMAYO

Mocoa	803	643	1 445	2 483	1 747	4 230	5 676	—	5 676	5 676
Colón	453	431	884	4 810	4 318	9 128	10 012	—	10 012	10 012
Totales	1 256	1 074	2 330	7 293	6 065	13 358	15 688	—	15 688	15 688

COMISARIA DEL VAUPES

Mitú	200	112	312	3 992	3 463	7 455	7 767	—	7 767	7 767
------	-----	-----	-----	-------	-------	-------	-------	---	-------	-------

COMISARIA DEL VICHADA

Puerto Carreño	249	143	392	4 557	4 145	8 702	9 094	—	9 094	9 094
----------------	-----	-----	-----	-------	-------	-------	-------	---	-------	-------

NOTAS AL CUADRO "POBLACION DE COLOMBIA, POR MUNICIPIOS, SEGUN CENSO DE 1938

DEPARTAMENTO DE ANTIOQUIA

- 1) *Llano* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 2145 habitantes y la del Corregimiento El Cerro con 1585
- 2) *Luerto Berrio* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 5487 habitantes y la del Corregimiento de La Virginia con 2510
- 3) *San Roque* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 2373 habitantes y la del Corregimiento de Caracoli con 2446
- 4) *Valdivia* La cabecera del Municipio no alcanza a formar un centro urbano pues solo tiene 977 habitantes en cambio la cabecera del Corregimiento del Rio del Norte este mismo Municipio forma un centro urbano con 1645 habitantes
- 5) *Varumal* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 8693 habitantes y la del Corregimiento de Belén con 1645

DEPARTAMENTO DEL ATLANTICO

- 6) *Sabanalarga* Tiene tres centros urbanos la cabecera del Municipio con 11437 habitantes la cabecera del Corregimiento de Lurucó con 1562 y la de Pondora con 2652
- 7) *Suana* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 2411 habitantes y la del Corregimiento de Santa Lucia con 2960

DEPARTAMENTO DE BOLIVAR

- 8) *Cartagena* Tiene tres centros urbanos la cabecera del Municipio con 72767 habitantes la cabecera del Corregimiento de Barú con 1921 y la del Corregimiento de Pasacaballos con 1776
- 9) *Achu* La cabecera del Municipio no alcanza a la categoría de núcleo urbano pues solo tiene 911 habitantes la del Corregimiento de Muzanga en el mismo Municipio tiene 1800 y es esta por tanto la que figura como agrupación urbana
- 10) *Arjona* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 10415 y la del Corregimiento de Sincorú con 1731
- 11) *Ayapel* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 1674 habitantes y la del Corregimiento de Monte Líbano con 3632
- 12) *Calamar* Tiene cuatro centros urbanos la cabecera del Municipio con 5934 habitantes y las de los Corregimientos de Arroyohondo con 1786 Hatoviejo con 1933 y Barranca Úva con 1501
- 13) *Coroal* Tiene tres centros urbanos la cabecera con 4519 habitantes la del Corregimiento de Pileta con 1994 y la de los Palomitos con 1736
- 14) *Forica* Tiene tres centros urbanos la cabecera con 6146 habitantes la del Corregimiento de San Bernardo con 2530 y la del Paio de Agua con 1500
- 15) *Maganque* Tiene cuatro centros urbanos la cabecera del Municipio con 9770 habitantes y la de los Corregimientos de Barrio de Córdoba con 4700 Yulí con 2010 y Cascajal con 1856
- 16) *Maria la Baja* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 4227 habitantes y las del Corregimiento de San Pablo con 1657
- 17) *Momil* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 2461 habitantes y la del Corregimiento de Pausima con 2318
- 18) *Ricaurte* Tiene en la cabecera solamente 1485 habitantes y por tanto no alcanza a la categoría de núcleo urbano la cabecera del Corregimiento de Chalu en el mismo Municipio cuenta con 1507 y esta sí la figura como agrupación urbana
- 19) *Sampues* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 5677 habitantes y la del Corregimiento de Escobar con 1553
- 20) *Santa Rosa* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 2111 habitantes y la del Corregimiento de Bavaria con 1570
- 21) *Since* Tiene tres centros urbanos la cabecera del Municipio con 8287 habitantes la del Corregimiento de Buenavista con 3171 y la del de San Pedro con 3839
- 22) *Sincelejo* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 11014 habitantes y la del Corregimiento de Chochó con 1675

DEPARTAMENTO DE BOYACA

- 23) *Territorio Vasquez* El Territorio Vasquez no está constituido para su administración en forma municipal depende directamente de la Gobernación de Boyacá y la autoridad se ejerce en la región por medio de Comisarios Especiales nombrados por dicha entidad

DEPARTAMENTO DE CALDAS

- 24) *Apia* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 3312 habitantes y la del Corregimiento de Viterbo con 2243
- 25) *Armenia* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 29673 habitantes y la del Corregimiento de Fajardo con 4331
- 26) *Belalcázar* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 2499 habitantes y la del Corregimiento de La Virginia con 1544
- 27) *Calarca* Tiene tres centros urbanos la cabecera del Municipio con 7453 habitantes la del Corregimiento de Quebadiana con 3729 y la del Corregimiento de Barcelona con 167

ADVERTENCIA.—Las fracciones o vecindades no son consideradas en este cuadro sino en caso de que arrijen más de 1500 habitantes debido a sus soluciones de continuidad

DEPARTAMENTO DEL CAUCA

- 28) *Florida (Tundama)* La cabecera del Municipio no alcanza a ser un centro urbano pues solamente contaba con 143 habitantes Había sin embargo en este Municipio un centro urbano constituido por la cabecera del Corregimiento de Tundama que tenía 1505 habitantes

DEPARTAMENTO DEL HUILA

- 29) *Vespa* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 1506 habitantes y la del Corregimiento de San Mateo con 1831

DEPARTAMENTO DEL MAGDALENA

- 30) *San a María* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 25113 habitantes y la del Corregimiento de Cúica con 2146
- 31) *Uvalaca* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 25113 habitantes y la del Corregimiento de Fundación con 4261
- 32) *Cerro de San Antonio* Tiene tres centros urbanos la cabecera del Municipio con 2508 habitantes y la de los Corregimientos de Chiquí y Concordia con 2252 y 2641 habitantes respectivamente
- 33) *Ciénaga* Tiene cinco centros urbanos la cabecera del Municipio con 22783 habitantes y las de los Corregimientos que siguen (Guacamayas con 2161 habitantes Orizaba con 2305 Píotro con 2941 y Sevilla con 2380)

- 34) *Sitonuevo* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 4630 habitantes y la del Corregimiento de El Morro con 2013
- 35) *Tenerife* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 1810 habitantes y la del Corregimiento de Chivolo con 2117
Se han considerado como centros urbanos aun aquellas cabeceras de Corregimientos que abriguen concentraciones obreras de la Zona Bananera a pesar de su relativa transitoriedad siempre y cuando que pasen de 1500 habitantes teniendo en cuenta en estos casos el número de edificios de la localidad

DEPARTAMENTO DE NARIÑO

- 36) *Sandoní* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 3382 habitantes y la del Corregimiento de El Ingenio con 1557

DEPARTAMENTO NORTE DE SANTANDER

- 37) En la población rural de Cúcuta y Toledo quedan incluidos 1750 motilones y 3025 tunebos que han sido repartidos en relación al sexo de acuerdo con la proporción de hombres y mujeres en la parte rural de dichos Municipios respectivamente por no haber sido posible obtener este dato con exactitud
- 38) *Cúcuta* Tiene tres centros urbanos la cabecera del Municipio con 37323 habitantes y la de los Corregimientos de San Luis y Puerto Rey con 2032 y 1877 habitantes respectivamente

(Continúa)

Notas al cuadro Poblacion de Colombia por Municipios, segun censo de 1938' - (Conclusion)

DEPARTAMENTO DE SANTANDER

- 39) *Bolívar* La cabecera del Municipio no alcanza a tener 1 500 habitantes lo que hace que se le considere como poblacion rural la cabecera del Corregimiento Olaveria Herrera del mismo Municipio tiene 2 630 y por tanto se presenta como parte urbana
- 40) *Guaca* Otro tanto sucede con este Municipio pues la cabecera solo tiene 1 245 habitantes y en cambio su Corregimiento de Baraya tiene 2 773

DEPARTAMENTO DEL TOLIMA

- 41) *Itigui* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 27 448 habitantes y la del Corregimiento de Tapias con 1 601
- 42) *Armero* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 6 401 habitantes y la del Corregimiento de Cuavabal con 1 778
- 43) *Cogaima* La cabecera de este Municipio solamente tiene 819 habitantes y por tanto no puede considerarse como nucleo urbano la del Corregimiento de San Juan en el mismo Municipio tiene 1 960 y esta cifra se toma como parte urbana
- 44) *Ispringal* Tiene tres centros urbanos la cabecera del Municipio con 5 665 habitantes y las del Corregimiento de Chicoral con 3 043 y Flandes con 3 945

DEPARTAMENTO DEL VALLE DEL CAUCA

- 45) *Buenaventura* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 14 515 habitantes y la del Corregimiento de Cajambre con 1 832

46) *Cucunari* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 2 516 habitantes y la del Corregimiento de Cinchira con 2 339

47) *La Mera* Tiene tres centros urbanos la cabecera del Municipio con 21 235 habitantes y las de los Corregimientos de Rozo con 1 774 y Mina con 1 872

48) *Sevilla* Tiene tres centros urbanos la cabecera del Municipio con 10 450 habitantes y las de los Corregimientos de El Pijao con 1 896 y Manzanillo con 1 554

49) *Julua* Tiene cuatro centros urbanos la cabecera del Municipio con 12 017 habitantes y las de los Corregimientos de Tres Esquinas con 2 175 Oriente con 2 167 y la Iberia con 2 415

50) *Trujillo* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 2 485 habitantes y la del Corregimiento de El Porvenir con 2 583

51) *Versalles* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 1 940 habitantes y las del Corregimiento de El Cairo con 1 700

INTENDENCIA DEL CHOCO

52) *Istmina* Tiene dos centros urbanos la cabecera del Municipio con 1 601 habitantes y la del Corregimiento de Cucurupi con 1 626

Habitantes de Colombia, por edad, sexo y estado civil, segun censo de 1938

AÑOS DE EDAD	SOÑEPOS			CAJADOS			VILDOS			RESUMEN		
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total
Menos de 1	145 799	143 817	289 616	—	—	—	—	—	—	145 799	143 817	289 616
De 1	110 526	108 224	218 750	—	—	—	—	—	—	110 526	108 224	218 750
2	139 382	137 683	277 065	—	—	—	—	—	—	139 382	137 683	277 065
3	140 534	139 806	280 340	—	—	—	—	—	—	140 534	139 806	280 340
4	134 684	135 267	269 951	—	—	—	—	—	—	134 684	135 267	269 951
5	130 950	124 442	255 392	—	—	—	—	—	—	130 950	124 442	255 392
6	121 819	120 246	242 065	—	—	—	—	—	—	121 819	120 246	242 065
7	133 948	132 238	266 186	—	—	—	—	—	—	133 948	132 238	266 186
8	141 741	137 176	278 917	—	—	—	—	—	—	141 741	137 176	278 917
9	101 473	102 289	203 762	—	—	—	—	—	—	101 473	102 289	203 762
10	136 524	129 295	265 819	—	—	—	—	—	—	136 524	129 295	265 819
11	85 007	84 259	169 266	—	—	—	—	—	—	85 007	84 259	169 266
12	134 000	123 028	257 028	—	2	2	—	—	—	134 000	123 028	257 028
13	91 456	87 812	179 268	1	9	10	—	—	—	91 457	87 811	179 268
14	99 473	96 11	195 584	91	470	561	—	1	1	99 564	96 732	196 296
15	98 045	99 683	197 728	480	1 990	2 470	5	48	53	98 530	101 701	200 231
16	78 127	87 925	166 052	504	3 980	4 484	16	76	92	78 647	91 982	170 629
17	69 509	75 038	144 547	643	7 053	7 696	21	86	107	70 173	82 177	152 350
18	109 009	109 637	218 646	1 713	15 675	17 388	68	292	360	110 790	125 604	236 394
19	61 420	56 960	118 380	1 808	13 461	15 269	51	247	298	63 279	70 668	133 947
20	91 091	99 793	190 884	6 273	32 553	38 826	237	911	1 148	97 501	133 257	230 758
21	60 082	34 489	94 571	4 928	14 337	19 265	109	321	430	65 119	49 147	114 266
22	85 956	63 866	149 822	11 561	30 814	42 375	230	807	1 037	97 747	95 487	193 234
23	61 771	47 989	109 760	13 042	24 985	38 028	224	716	940	75 037	68 691	143 728
24	56 156	41 562	97 718	15 387	25 942	41 329	277	774	1 051	71 820	69 278	141 098
25	78 196	75 591	153 787	27 936	51 209	79 145	640	2 186	2 826	106 772	127 154	233 926
26	40 010	31 593	71 603	18 388	27 075	45 463	420	1 166	1 586	58 848	59 834	118 682
27	32 547	24 911	57 458	18 543	24 234	42 777	427	1 195	1 622	51 517	50 340	101 857
28	49 785	43 320	93 105	32 179	42 956	75 135	840	2 305	3 145	82 804	88 581	171 385
29	19 347	14 311	33 658	15 065	16 801	31 866	374	1 002	1 376	34 786	32 144	66 930
30	61 019	66 769	127 788	51 803	67 998	119 801	1 752	6 027	7 779	114 604	140 794	255 398
31	11 510	7 189	18 699	11 516	8 630	20 152	318	550	868	23 404	16 375	39 779
32	24 545	20 333	44 878	27 666	26 891	54 557	816	2 032	2 848	53 027	49 256	102 283
33	17 259	12 424	29 683	21 221	16 700	37 921	679	1 391	2 060	39 159	30 505	69 664
34	14 905	11 710	26 615	19 056	16 019	35 075	612	1 413	2 025	31 573	29 201	60 774
35	41 229	4 850	46 079	53 953	57 460	111 413	2 228	7 657	9 885	97 680	110 972	208 652

(Continúa)

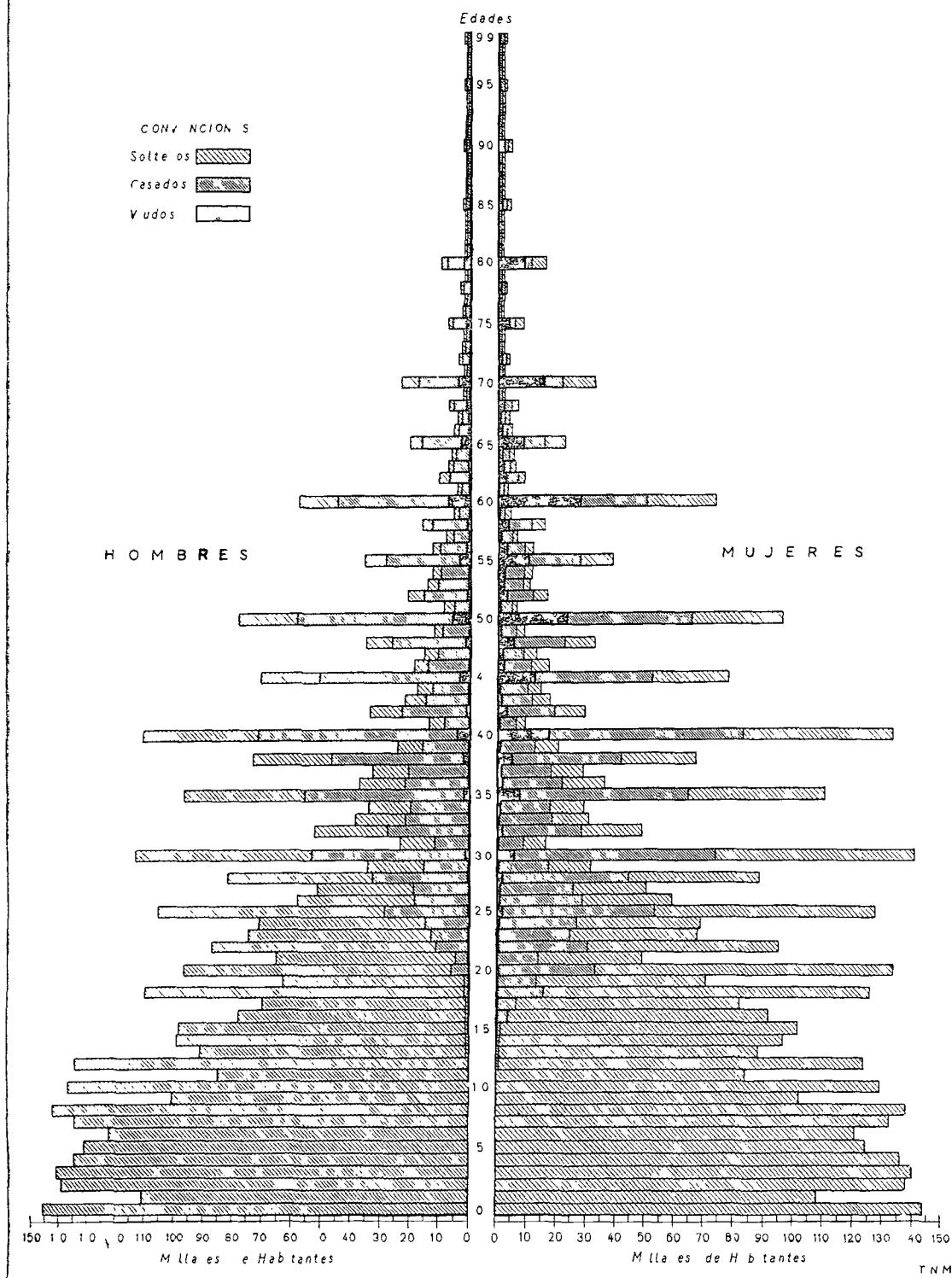
Habitantes de Colombia por edad sexo y estado civil segun censo de 1938 - (Conclusion)

AÑOS DE EDAD	SOLIFROS			CASADOS			VIUDOS			RESUMEN		
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total
De 36	15 222	14 580	29 802	21 177	17 609	40 786	831	2 188	3 069	37 280	36 377	73 657
37	12 547	11 038	23 585	19 603	15 904	33 507	799	2 079	2 878	32 949	29 021	61 970
38	27 191	26 040	53 231	44 594	36 389	80 983	2 118	5 369	7 487	73 903	67 798	141 701
39	9 001	7 807	16 808	14 937	10 897	25 834	742	1 674	2 416	24 680	20 378	45 058
40	39 028	50 483	89 511	67 513	65 721	133 234	4 611	17 360	21 971	111 157	133 564	244 721
41	4 637	3 737	8 374	8 773	5 346	14 119	492	861	1 353	13 907	9 944	23 851
42	10 805	10 199	21 004	21 946	16 011	37 957	1 370	3 179	4 499	34 071	29 389	63 460
43	6 564	5 791	12 355	14 269	9 054	23 923	884	1 963	2 847	21 717	17 408	39 125
44	5 294	4 704	9 998	11 945	8 683	20 628	739	1 605	2 344	17 978	14 992	32 970
45	20 171	25 907	46 078	47 487	39 224	86 711	3 791	12 845	16 636	71 449	77 976	149 425
46	5 277	5 481	10 708	13 080	9 462	22 542	959	2 175	3 134	19 266	17 118	36 384
47	4 068	3 957	8 025	10 140	6 949	17 389	751	1 795	2 546	15 259	12 701	27 960
48	9 186	10 408	19 594	24 088	16 853	40 941	1 978	5 322	7 300	35 252	32 583	67 835
49	3 153	2 980	6 133	8 420	4 886	13 306	713	1 471	2 184	17 286	9 337	26 623
50	19 672	31 291	50 963	52 576	41 977	94 658	5 229	23 533	29 832	78 577	96 901	175 478
51	2 349	2 054	4 413	6 284	3 069	9 353	576	1 115	1 691	9 209	6 248	15 457
52	4 998	5 411	10 409	14 730	8 063	22 793	1 518	3 375	4 893	21 245	16 849	38 095
53	3 503	3 459	6 962	10 164	5 717	15 381	1 070	2 261	3 331	14 737	10 937	25 674
54	3 155	3 341	6 496	9 012	5 366	14 378	958	2 320	3 278	13 125	11 027	24 152
55	7 354	11 400	18 754	24 829	16 610	41 469	3 261	10 689	13 950	35 444	38 729	74 173
56	2 821	3 658	6 479	9 083	5 253	14 346	1 198	3 061	4 259	13 102	11 982	25 084
57	1 710	1 904	3 614	5 574	2 930	8 504	776	1 633	2 409	8 060	6 467	14 527
58	3 541	4 716	8 257	11 470	6 540	18 010	1 685	4 144	5 829	10 696	15 400	37 096
59	1 183	1 318	2 501	3 638	1 959	5 597	493	1 158	1 651	5 314	4 435	9 749
60	12 707	23 569	36 276	37 545	22 165	59 710	7 770	28 467	36 237	58 072	74 201	132 273
61	938	1 132	2 070	3 133	1 221	4 354	571	922	1 443	4 597	3 275	7 867
62	2 095	2 596	4 691	7 309	3 218	10 527	1 367	2 956	4 323	10 771	8 770	19 541
63	1 494	1 127	2 621	5 242	2 184	7 426	1 029	2 026	3 055	7 155	5 937	13 092
64	1 201	1 591	2 792	4 391	2 075	6 426	975	1 898	2 873	6 517	5 524	12 041
65	3 666	6 516	10 182	13 191	6 557	19 748	3 195	9 660	12 855	20 052	27 733	47 785
66	1 026	1 451	2 477	3 925	1 737	5 662	863	1 809	2 672	5 814	4 997	10 811
67	797	1 067	1 864	2 918	1 170	4 038	707	1 484	2 191	4 422	3 671	8 093
68	1 415	2 167	3 582	4 799	2 116	6 915	1 241	2 879	4 120	7 455	7 162	14 617
69	473	683	1 156	1 415	681	2 096	385	840	1 225	2 273	2 204	4 477
70	5 197	10 307	15 504	13 698	6 848	20 546	4 613	15 876	20 519	23 538	33 031	56 569
71	425	649	1 074	1 111	428	1 539	328	606	934	1 864	1 683	3 547
72	831	1 253	2 084	2 426	893	3 319	751	1 792	2 543	4 008	3 938	7 946
73	429	674	1 103	1 479	508	1 987	497	998	1 495	2 405	2 180	4 585
74	370	715	1 085	1 311	511	1 822	451	898	1 353	2 136	2 124	4 260
75	1 454	2 763	4 217	4 412	1 971	6 333	1 620	4 663	6 283	7 486	9 347	16 833
76	340	593	933	1 231	447	1 678	479	1 026	1 505	2 050	2 066	4 116
77	302	394	696	928	296	1 224	368	698	1 066	1 598	1 388	2 986
78	613	996	1 609	1 932	639	2 571	879	1 658	2 537	3 424	3 293	6 717
79	172	286	458	491	181	672	241	394	635	904	861	1 765
80	2 090	5 056	7 146	5 177	2 256	7 433	2 708	9 215	11 923	9 975	16 577	26 552
81	229	366	595	275	124	399	154	307	456	658	792	1 450
82	267	446	713	592	206	798	325	683	1 008	1 184	1 335	2 519
83	140	193	333	405	124	529	222	420	642	767	737	1 504
84	150	240	390	386	145	531	260	465	725	796	850	1 646
85	425	961	1 386	1 197	515	1 707	694	1 923	2 616	2 310	3 399	5 709
86	107	237	344	294	94	388	210	471	631	606	747	1 353
87	86	180	266	225	85	310	159	310	469	470	575	1 045
88	158	288	446	358	117	475	265	435	700	781	840	1 621
89	79	101	180	166	67	228	114	224	338	359	387	746
90	571	1 281	1 852	964	477	1 441	853	2 725	3 579	2 338	4 484	6 822
91	87	151	238	38	22	60	36	87	123	156	260	4 16
92	81	120	201	90	40	130	79	183	262	250	343	593
93	50	52	102	75	46	121	45	118	163	170	216	386
94	30	50	80	46	24	70	40	95	135	116	169	285
95	100	292	392	224	125	349	215	629	844	539	1 046	1 585
96	36	87	123	76	21	97	81	177	258	193	285	478
97	20	49	69	62	20	82	50	86	136	137	155	292
98	54	114	168	104	51	155	96	246	342	254	411	665
99 o más	260	539	799	389	159	548	388	1 211	1 600	1 038	1 909	2 947
Totales	3 272 429	3 189 623	6 462 052	953 524	951 287	1 904 811	84 204	245 974	330 178	4 310 157	4 386 884	8 697 041
Indigenas sin clasificar												4 775
Gran total												8 701 816

COLOMBIA

CENSO DE POBLACION DE 1938

POBLACION POR SEXO EDAD Y ESTADO CIVIL



Habitantes de Colombia en 1918 y 1938 clasificados por grupos de edad

PERIODOS DE EDAD	POBLACION ABSOLUTA		POBLACION RELATIVA POR 1000	
	1918	1938	1918	1938
Hasta 1 año	216179	289316	369	333
De 1 a 4 años	613903	1 046106	1049	1202
De 5 a 9	707105	1 246322	1208	1432
De 10 a 14	630688	1 037687	1077	1227
De 15 a 19	523676	893551	894	1027
De 20 a 29	951187	1 515964	1625	1742
De 30 a 39	712529	1 061936	1217	1220
De 40 a 49	472432	707344	807	813
De 50 a 59	282386	434485	482	499
De 60 a 69	181385	266147	310	306
De 70 a 79	77548	109324	132	125
De 80 a 89	38310	44095	66	51
De 90 y mas años	13074	14464	22	17
No especificados	276147	—	472	—
Indios de tribu sin clasificar	158428	4775	270	06
Totales	5 855077	8 701816	1000	1000

Habitantes de Colombia en 1918 y 1938, clasificados por periodos de vida

PERIODOS DE VIDA	POBLACION ABSOLUTA		POBLACION RELATIVA POR 1000	
	1918	1938	1918	1938
Infancia				
0 a 4 años	830082	1 335722	1418	1535
Escolar				
5 a 14 años	1 337793	2 314009	2285	2659
Activa				
15 a 49 años	2 659924	4 178795	4543	4802
Madura				
50 a 69 años	463771	700632	792	805
Vejez				
70 y mas años	128932	167883	220	193
No especificados	276147	—	472	—
Indígenas no especificados	158428	4775	270	06
Totales	5 855077	8 701816	1000	1000

Distribucion de la poblacion, en grupos de edad, correspondiente al Standard Sueco
No incluye 4 775 indígenas sin clasificar

AÑOS DE EDAD	Distribucion en Colombia	Distribucion en Suecia
0 a 1	333	255
1 a 19	4891	3980
20 a 39	2964	2696
40 a 59	1313	1923
60 o mas años	499	1145
Totales	10000	10000

Distribucion de la poblacion en grupos de edad, correspondiente al Standard Million Ingles
No incluye 4 775 indígenas sin clasificar

AÑOS DE EDAD	DISTRIBUCION EN COLOMBIA			DISTRIBUCION EN EL STANDARD MILLION INGLES		
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total
0 a 4	7144	76439	153583	57039	57223	114262
5 a 9	72431	70871	143305	53462	53747	107209
10 a 14	62843	5991	1 2764	51370	51365	102735
15 a 19	48456	54285	102742	49420	50376	99796
20 a 24	46835	47816	94651	45273	50373	95646
25 a 34	68931	71770	140701	75425	85154	160579
35 a 44	53502	51023	104525	5934	63155	122849
45 a 54	34391	33537	67928	42924	46298	89222
55 a 64	19118	20090	39208	27913	31828	59741
65 a 74	8505	9627	18132	14391	18389	33080
75 o mas años	4433	6028	10461	5632	7949	13581
Totales	495589	504411	1 000000	483543	516457	1 000000

ERRATAS ADVERTIDAS

Referencia	Donde dice	Debe decir
Página 47-Cuadro XXVI 3 columna-4 línea de cifra	5956	5856
Página 48-4 columna del cuadro-1 línea de cifra	1350980	1360010
Página 48-Ultima línea de la primera columna de texto	$x = 2602 + 31767x +$ $+ 0.9397x - 197627 \log x$	$x = 21602 + 31767x +$ $+ 0.9557x - 197627 \log x$
Página 62-1 columna línea 58	Si llamamos x a la abscisa co	Si llamamos x a la abscisa co
Página 68-Línea 40	$\left\{ \begin{array}{l} 4148871271B-2724322761119C+ \\ +424279721361815h=9687150621600 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4148871271B-2724322761119C+ \\ +424279721361815h=9687150621600 \end{array} \right.$
Página 71-2 columna Ecuación (33)	$x = \frac{5296900}{0.1199 + e^{0.076649}}$ (33)	$y = \frac{3296900}{0.1199 + e^{0.066422}}$ (33)
Página 79-2 columna 2 fórmula	$\frac{k-(y_1-p)}{k-(x_1-p)} = \frac{(y_1-p)(y_2-p)}{(x_1-p)(x_2-p)} \left[\frac{k-(y_1-p)}{k-(y_2-p)} \right]$	$\frac{k-(y_1-p)}{k-(x_1-p)} = \frac{(y_2-p)(y_1-p)}{(x_1-p)(x_2-p)} \left[\frac{k-(y_1-p)}{k-(y_2-p)} \right]$
Página 86-Cuadro LVII 1.º Encabezamiento de la 3.ª columna	$\sum x y \log x$	$\sum x(y-p) e^{-x}$
Página 86-Cuadro LVII 2.º Encabezamiento de la 3.ª columna	$\sum x(x-d) e^{-x}$	$\sum x^2 y-p e^{-2x}$

Página 78 83 y 86 cuadros XLIX LIV y LVII respectivamente en el encabezamiento de la columna cada expresión de la forma $(x-d)$ debe leerse por $(x-p)$